Olympiades académiques de mathématiques
Concours 2007

Éléments de solution

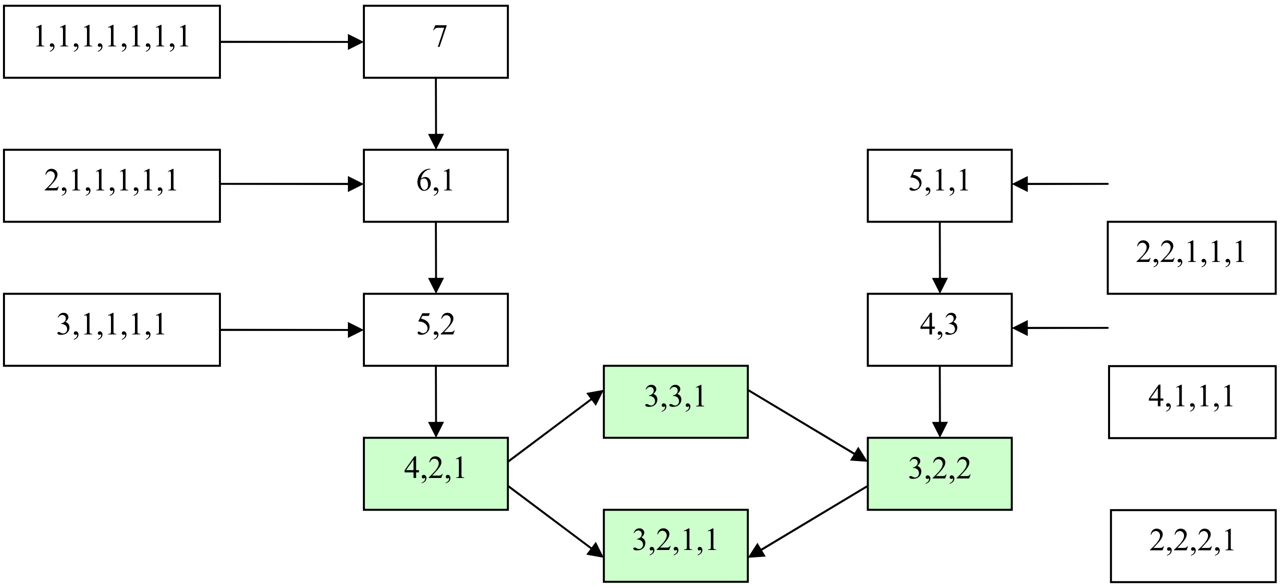
(Les exercices 1 et 2, communs à tous les candidats, sont proposés par la cellule nationale)

****

Exercice 1

Un problème de tas

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



1. En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1). Quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite. Comme 2007 = 501 x 4 + 3 , après 2007 manipulations, on aura encore la répartition $\boxed{(4,2,1)}$.

2. On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)
(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) ((1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

… et la réponse à la question posée.

3. Et pour la question 3, seule la répartition finale $\boxed{(3,3,1)}$ pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

Exercice 2

Des trapèzes de même aire

1. De l'égalité $m^2-p^2=8$, on déduit (*) : $m^2=p^2+8$ donc : $p<m<p+3$, et $m=p+1$ ou $m=p+2$.
Avec $m=p+1$, (*) est impossible. Avec $m=p+2$, il vient $p=1$ et $m=3$.

2. Une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :
DC= AB-AD ; MN=AB-2
L'égalité des aires conduit alors à : $(AB-4)^2-(AD-AB)^2=8$.
On obtient avec 1) : AB=7, AD=6, DC=1.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).

Exercice 3

Rallye mathématique

1. 2 007 est un multiple de 3. Ses prédécesseurs par addition de 3 ou multiplication par 5 sont eux aussi des multiples de 3, parmi lesquels ne figure pas 1.
2. À partir de n'importe quel multiple de 3 inférieur à 2007, on peut obtenir 2 007 en ajoutant 3 le nombre de fois qu'il faut. Le produit par 5 fait gagner des étapes, c'est tout. En revanche, un nombre de la forme $3n+1$ garde cette forme lorsqu'on lui ajoute 3 et est transformé en un nombre de la forme $3n+2$ lorsqu'on le multiplie par 5, et un nombre de la forme $3n+2$, qui garde cette forme lorsqu'on lui ajoute 3, est transformé en un nombre de la forme $3n+1$ lorsqu'on le multiplie par 5. Il n'y a donc aucun espoir d'obtenir un multiple de 3 à partir d'un non multiple de 3.
3. Douze. On fait le parcours à l'envers.

Exercice 4

Bonnes affaires

1. La remise effectivement consentie s'élève à 10 € pour un achat total de 100 €. Elle est de 10%.
2. La remise effectivement consentie s'élève à 10 € pour un achat total de 120 €. Elle est de 8,33 % (valeur arrondie au centième).
3. Sur trois achats successifs de 60 €, la remise consentie est de 20 €, soit $\frac{2\times 10}{3\times 60}$, en pourcentage 11,11% (arrondi au centième). Sur quatre achats le calcul donne $\frac{3\times 10}{4\times 60}$, en pourcentage 12,5%. Plus généralement, si on effectue n achats, la remise s'exprime par $R_n=\frac{(n-1)\times 10}{n\times 60}$, et croît avec n sans dépasser $\frac{1}{6}$.