Exercice 1
Les bons nombres

1. Pour répondre à cette question, nous ne considérerons que les décompositions des entiers compris entre 4 et 10 en sommes d'entiers ne faisant pas apparaître le nombre 1, attendu que dans ces cas, la somme des inverses des termes de la somme est strictement supérieure à 1.
La seule décomposition de 4 à considérer est :
4 = 2+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 4 est un bon nombre.
Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant deux 2.
La seule décomposition de 5 à considérer est :
5 = 3+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 5/6. Donc 5 est mauvais.
Les décompositions de 6 à considérer sont :
6 = 4+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 3/4.
6 = 3+3, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 2/3. Donc 6 est mauvais.
Les décompositions de 7 à considérer sont :
7 = 5+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 7/10,
7 = 4+3, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 7/12. Donc 7 est mauvais.
Les décompositions de 8 à considérer sont :
8 = 6 + 2, 8 = 3+5, 8 = 4 +4, 8 = 3 + 3 + 2, pour lesquelles la somme des inverses des termes de la somme est différente de 1. Donc 8 est mauvais.
Parmi les décompositions de 9 à considérer figure :
9 = 3+3+3, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 9 est un bon nombre.
Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant trois 3.
Parmi les décompositions de 10 figure :
10 = 4+4+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 10 est un bon nombre.

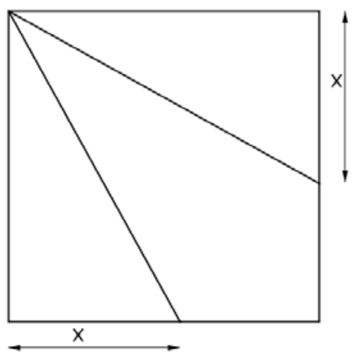
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on peut écrire : $n^2 = n + n + n + ... + n + n$, somme de n termes. La somme de leurs inverses vaut 1. Donc n^2 est un bon nombre.

3. Si n est un bon nombre, il existe une décomposition $n = a + b + ... + k$ telle que $1/a + 1/b + ... + 1/k = 1$. À la décomposition $2n = 2a + 2b + ... + 2k$ est donc associée la somme 1/2, et donc à la décomposition
$2n + 2 = 2a + 2b + ... + 2k + 2$ la somme 1. $2n + 2$ est donc un bon nombre.
La même décomposition de $2n$, associée à la décomposition $9 = 3 + 6$, conduit au résultat : $2n + 9$ est un bon nombre.

4. On peut écrire : $56 = 2\times27 + 2$ et $57 = 2\times24 + 9$. Ces deux nombres sont donc bons. Tous les nombres pairs supérieurs à 56 sont donc bons. Il en est de même des nombres impairs supérieurs à 57.

Exercice numéro 2

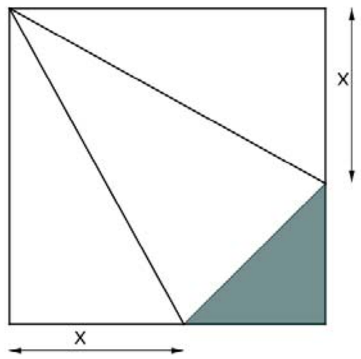
Un partage équitable



1. L'aire de chaque triangle rectangle de côté x est $A = \dfrac{x}{2}$. On écrit l'égalité entre l'aire de la partie médiane et A :

$$\frac{x}{2} = 1 - 2\times\frac{x}{2}.$$

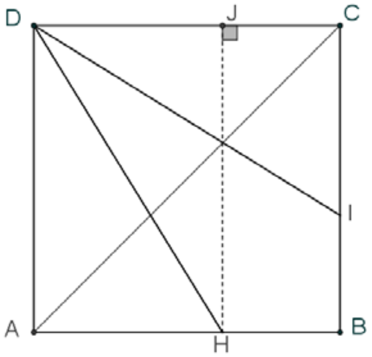
La solution de cette équation est $\dfrac{2}{3}$.



2. La même condition s'écrit cette fois :

$$1-\frac{(1-x)^2}{2}=3\frac{x}{2},$$

Dont la solution positive est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



3. On se place dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ et on cherche si le point d'intersection de (AC) et (DI) a la même abscisse que H. Une équation de (AC) est $y=x$, une équation de (DI) est $y-1=x\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Le point d'intersection de ces droites a pour abscisse $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, celle de H. Il y a bien concours.

Exercice numéro 3

Permutations

1. Les tableaux suivants donnent dans les cas $n=4$ et $n=5$ des exemples de permutations dans lesquelles les distances prennent toutes les valeurs possibles une fois.

Liste L_1	1	2	3	4
Liste L_2	4	2	1	3
Distances	3	0	2	1

Liste L_1	1	2	3	4	5
Liste L_2	5	2	4	1	3
Distances	4	0	1	3	2

Remarque : Dire que tous les nombres de la première liste figurent dans la seconde, c'est dire que la somme algébrique des déplacements (dans les exemples précédents 3 + 0 – 2 – 1 et 4 + 0 + 1 – 3 – 2) est nulle.

2. Cas n = 6
Chacune des distances 0, 1, 2, 3, 4 et 5 étant atteinte une fois et une fois seulement, en vertu de la remarque précédente, on devrait pouvoir séparer la somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 en deux sommes égales, et donc égales à sa moitié. Mais cette somme est un nombre impair (15). Donc c'est impossible.

3. Cas général

Dans le cas de *n* nombres, il s'agit de savoir si la somme 0 + 1 + 2 + 3 + ... + (*n* – 2) + (*n* – 1) est paire. Or cette somme vaut : $S_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

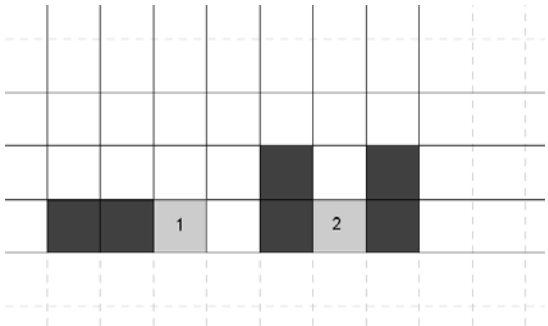
Posons $n = 4p + r$ et donnons successivement à r les valeurs –1, 0, 1 et 2. On constate que S_n est paire dans les cas $r = 0$ et $r = -1$.

Exercice numéro 4

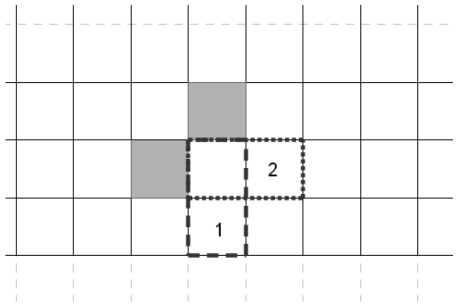
Dominos

1. Étude de certaines configurations

a. Le bord.
Si une case libre est voisine d'au moins un domino occupant deux cases du bord, ce domino peut être glissé vers la case vide (cas 1 de la figure).
Si ce n'est pas le cas, alors la case libre est voisine de deux dominos n'occupant qu'une case du bord (cas 2) et alors soit sa troisième voisine est libre et il y a deux cases libres contigües, soit elle ne l'est pas et est couverte par un domino qui peut glisser vers la case libre.

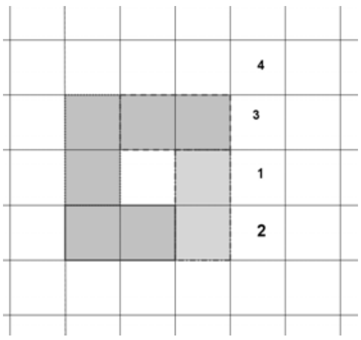


b. Le sous-damier de quatre cases
Il est exclu que deux cases voisines soient libres. Un damier de quatre cases peut donc avoir au maximum deux cases libres se touchant par un coin. Dans ce cas, le domino qui recouvre une des cases recouvertes du damier est en position 1 ou 2 (c'est nécessairement 2 si la case en bas à droite est au coin en bas à droite de l'échiquier, par exemple). Mais alors les dominos 1 et 2 peuvent glisser, l'un vers le haut, l'autre vers la droite. Donc un sous damier de quatre cases en a au plus une libre.

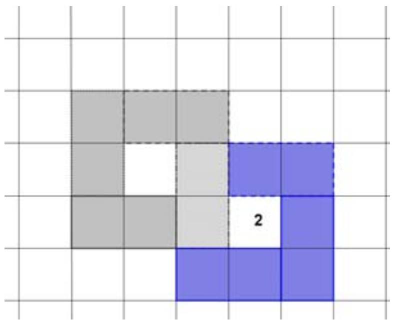


Réflexions intermédiaires sur la situation autour d'une case libre

Une case libre n'est pas sur le bord et elle n'a comme voisines, par les côtés ou par les coins, que des cases couvertes par des dominos dont aucun ne peut glisser vers elle. Où se trouve son éventuelle plus proche voisine libre ? À une isométrie près, en 1, en 2, en 3 ou en 4 sur le dessin ci-dessous.

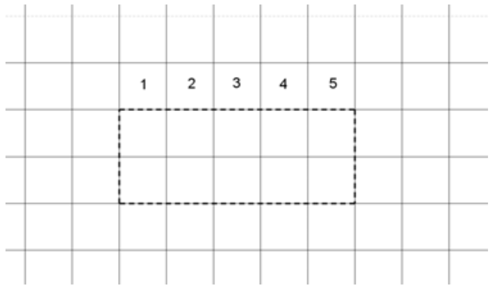


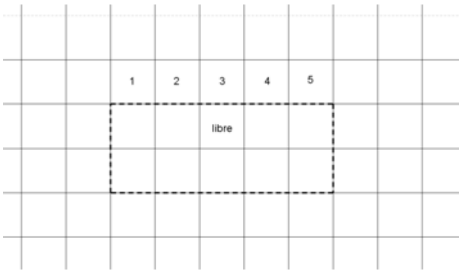
La case 3 peut être recouverte par glissement du domino à sa gauche. Les cases 1 et 4 ne peuvent être entourées par quatre dominos qui lui présenteraient chacun sa longueur. C'est en revanche possible pour la case 2. Trois autres cases sont dans une situation analogue.



c. Le sous-damier 5×2

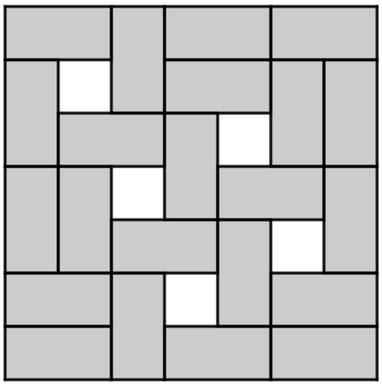
Le nombre de cases non recouvertes dans un sous-damier 5×2 est inférieur ou égal à 3 d'après la question précédente. Supposons qu'il y ait trois cases non recouvertes. Elles se situent nécessairement dans les colonnes 1, 3 et 5 (il n'y en a qu'une dans les colonnes 1 et 2, et qu'une dans les colonnes 4 et 5 donc s'il y en a trois, il y en a une dans la colonne 3, etc.)





Dans le sous-damier 5×2, s'il y a une case libre dans la colonne 3, une seule des autres case du damier est dans une situation analogue à la case 2 de notre réflexion (elle est dans la colonne 3 ou dans la colonne 5, mais il n'y en a qu'une). Donc il y a au maximum 2 cases non recouvertes dans ce sous-damier.

2. Le damier 7×7 et ses cinq cases libres

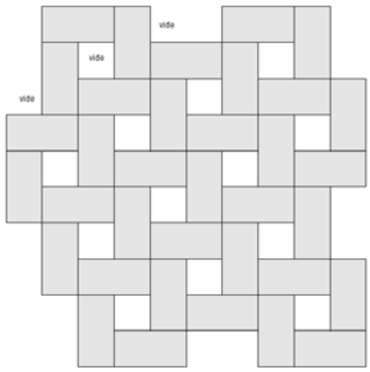


3. Étude de la proportion de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide. Majoration.

On recouvre le damier $n \times n$ par un pavage de damiers 5×2, par exemple les « longueurs 5 » dans le sens de la longueur. Si *n* est impair, la rangée la ligne la plus basse n'est pas recouverte, mais cela n'a pas d'importance, attendu qu'elle ne contient pas de case libre. Le nombre de sous-damiers 5×5 utilisé pour ce recouvrement est inférieur à $\frac{n}{2} \times \frac{n+5}{5}$ et chacun de ces sous-damiers contient au plus deux cases libres. Le nombre de cases libres, au total est donc inférieur à $n\frac{n+5}{5}$.

4. Étude de la proportion de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide. Minoration.

L'esquisse ci-contre montre un agencement permettant, sur chaque ligne et chaque colonne, de faire alterner une case libre et 4 cases recouvertes. Sur une ligne de *n* cases, les deux cases extrêmes doivent être recouvertes, et on occupe avec des alignements de 4 cases recouvertes et une libre un multiple de 5 plus grand que $(n-2)-4$. Le nombre de cases libres est donc supérieur à $\frac{(n-6)^2}{5}$.



4. Comportement limite.

Pour n assez grand, on a $\frac{(n-6)^2}{5n^2} \leqslant \frac{f(n)}{n^2} \leqslant \frac{n(n+5)}{5n^2}$

La proportion de cases non recouvertes tend vers $\frac{1}{5}$.