MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Mercredi 10 mars 2010

Classes de premières S et S.T.I.

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE INRIA
Partenaire de l'académie de Versailles

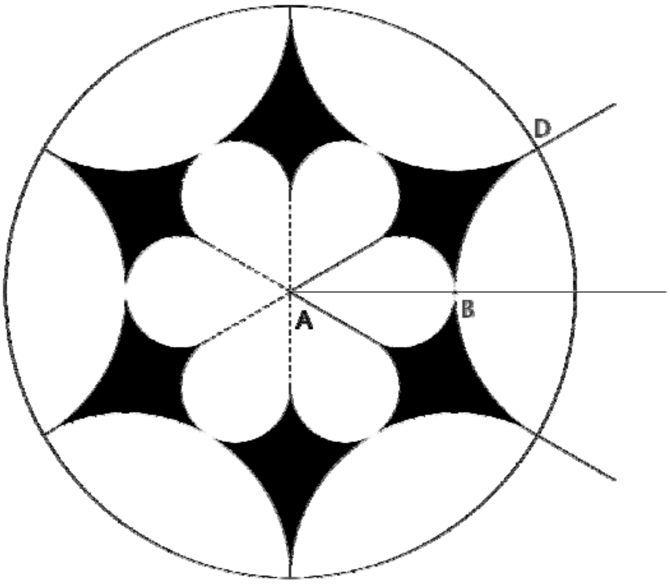
Exercice 1

(*Proposé par le jury national*)

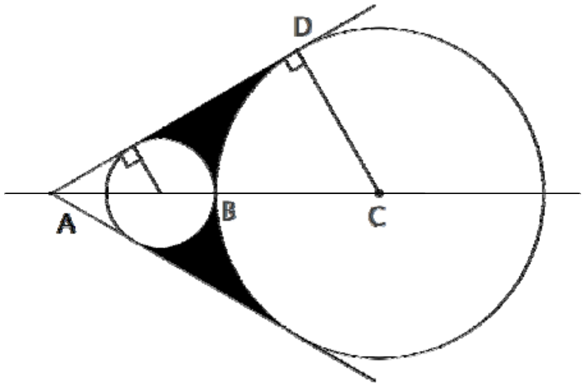
La rosace

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que $AB = BC$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice 2

(*Proposé par le jury national*)

À la recherche du chaînonze

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités diminuée du chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7 + 9 - 5 = 11$ et $0 + 9 - 9 = 0$.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres. Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « a a ».

   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Tournez la page S.V.P.

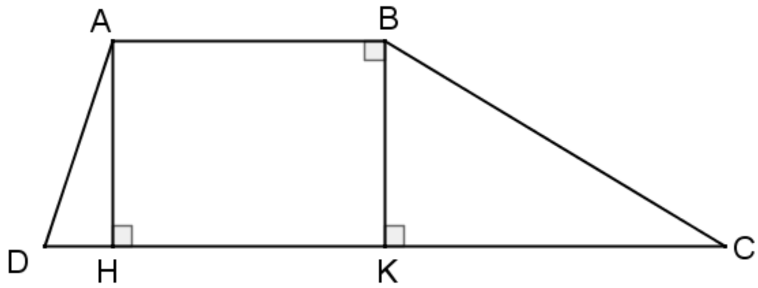
Exercice 3

(*Proposé par le jury académique*)

Le trapèze

La figure ci-dessous représente un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD]. Le but de l'exercice est de déterminer et de construire de tels trapèzes vérifiant la condition (E) :

$$(E) \quad \begin{cases} \mathrm{CD} = 2\,\mathrm{AB} \\ \mathrm{BC} = 2\,\mathrm{AD} \end{cases}$$



(cette figure ne représente pas une solution du problème)

On pose AB = a, AD = b, DH = x, KC = y et AH = h.

1. Montrer que si le trapèze ABCD vérifie la condition (E), alors : $\sqrt{3}b < a < 3b$
2. Réciproquement, montrer que la condition ci-dessus est suffisante pour exprimer que ABCD vérifie la condition (E).
3. Construire un tel trapèze en prenant a = 2 et b = 1. La figure, où les traits de construction seront apparents, sera accompagnée d'une rédaction.

Exercice 4

(*Proposé par le jury académique*)

La semeuse

9										
8										
7										
6										
5					7					
4				6						
3			5							
2		4								
1	3									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

On repère chaque case du tableau (infini) ci-contre par deux entiers naturels a (abscisse) et b (ordonnée).
À chaque case, repérée par le couple (a,b) on attribue un nombre, noté $f(a,b)$ respectant les conditions suivantes :
- Les cases de coordonnées (a,b) et (b,a) reçoivent le même nombre ;
- Pour tout entier a, la case de coordonnées (a,a) reçoit le nombre $a+2$;
- Quels que soient les entiers a et b,
$b \times f(a, a+b) = (a+b) \times f(a,b)$

1. Quels sont les nombres inscrits dans les cases de coordonnées (1, 2) et (1, 3) ?
2. Plus généralement, si on se donne un entier naturel b, quel est le nombre inscrit dans la case de coordonnées (1, b) ?
3. Quels est le numéro inscrit dans la case de coordonnées (8, 5) ?
4. Quel est le numéro inscrit dans la case de coordonnées (2 000, 2 010) ?