Exercice 1 : Essuie-glaces

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur approchée au cm^2 près.

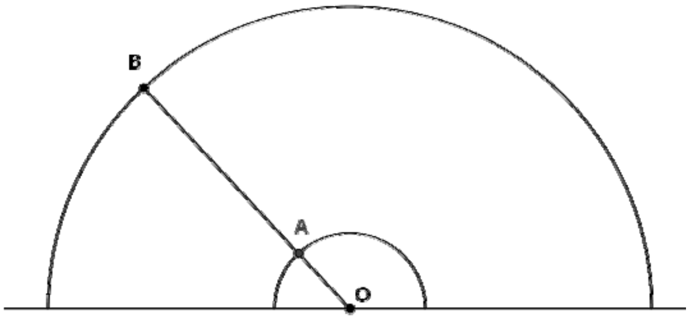


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

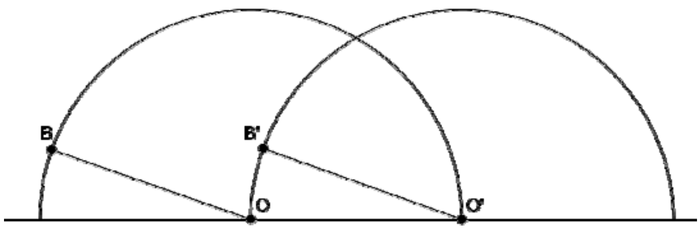


Fig. 2

3.1. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = *a*.
Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

Fig.3

3.2. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.
Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de *a* l'aire de la surface essuyée par le balai.

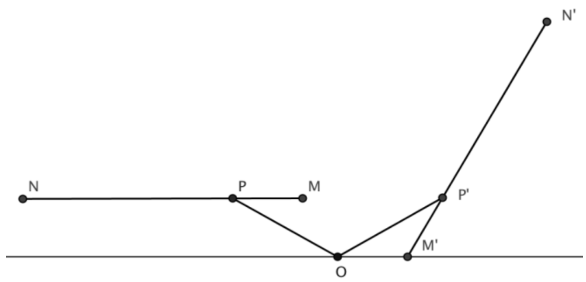


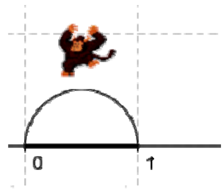
Fig. 4

Exercice 2 : Le singe sauteur

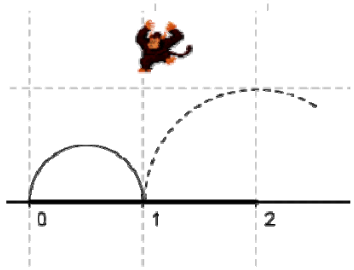
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit *atteignable* si le singe peut, en partant de l'origine (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en exactement n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (effectués dans cet ordre) et sans jamais sortir du segment $[0\ ;\ n]$.

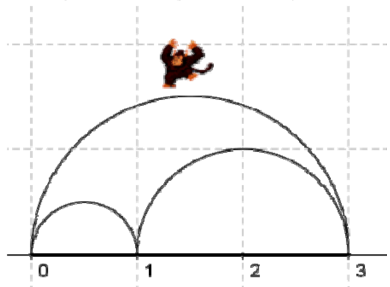
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5. *a.* Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.

b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose N $\geq$ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N + 4 est aussi atteignable.

Exercice 3 : Fabrique de triplets

Préliminaires

1. Soit x et y deux nombres réels strictement inférieurs à 1. On note S leur somme et P leur produit. Montrer que $S < P + 1$.

2. Quel est le sens de variation de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{1}{x}$?

Recherche de triplets

On s'intéresse aux triplets (a, b, c) tels que $0 < a \leqslant b \leqslant c$, $abc > 1$ et $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\cdot$

3. Montrer que, pour un tel triplet, $a < 1$.
4. Se peut-il que $b < 1$?
On pourra utiliser les préliminaires.

5. Se peut-il que $b = 1$?

6. Alice affirme : « Si $a < 1 < b$ et $b \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$, alors on peut trouver un réel c tel que le triplet (a, b, c) soit solution. A-t-elle raison ?

7. Bob ajoute : « Ces conditions ne sont pas nécessaires ». A-t-il raison ?

Exercice 4 : Billard dans un angle

Pour faciliter la lecture des copies, la mesure d'angle utilisée dans cet exercice est le degré.
On considère deux demi-droites [Ox) et [Oy) et un point A de la demi-droite [Ox) tel que OA = 1.
On note θ une mesure de l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$.
Étant donné un point B sur la demi-droite [Oy), on construit, si possible, le point C du segment [OA] tel que CA = CB.

1. On note α une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{OAB}}$. Pour quelles valeurs de α peut-on construire le point C ?

2. On suppose qu'on a pu construire le point C. On construit alors, si possible, un point D du segment [OB] tel que DB = DC. Pour quelles valeurs de α peut-on construire le point D ?

3. On continue le processus précédent, construisant ainsi tant qu'il est possible et alternativement des points sur [OA] ou [OB]. Si M et M' sont deux points construits (dans cet ordre) et si on construit le point suivant M'', point du segment [OM] tel que M''M = M''M', on note x et x' les mesures des angles $\widehat{\mathrm{OMM'}}$ et $\widehat{\mathrm{OM'M''}}$. Pour quelle valeur de x a-t-on $x' = x$?

4. On suppose dorénavant qu'on peut construire autant de points qu'on veut.
Pour quelles valeurs de α cela est-il possible ?
5. Quelle relation existe-t-il alors entre la longueur de la ligne formée par les segments joignant A à B, B à C, C à D, …, M à M', M' à M'', etc. et le périmètre du triangle ABC ?
Si le périmètre du triangle ABC vaut $1+\sqrt{2}$, combien vaut θ ?