Olympiades académiques de mathématiques

Mercredi 19 mars 2014

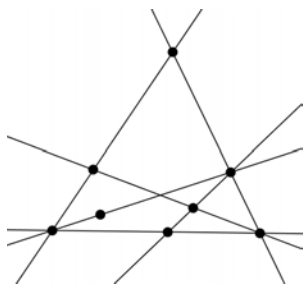
Classes de première L, ES, STMG

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice 1 (Proposé par la commission nationale)
Figures équilibrées

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points). Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.



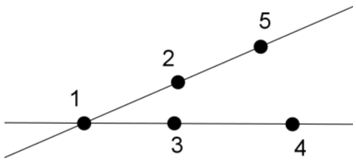
Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.

1. Construire une figure équilibrée constituée :
a. de 7 points marqués et 5 droites ;
b. de 9 points marqués et 8 droites.

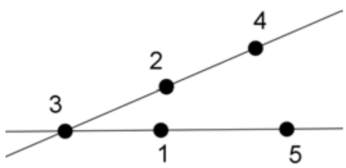
Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p. Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :

$K = 8$

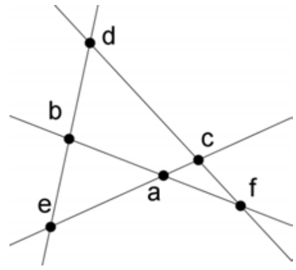


$K = 9$

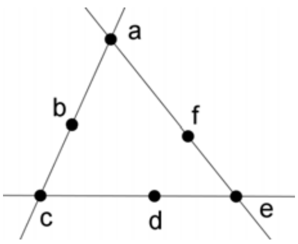


Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.



a. Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
b. Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

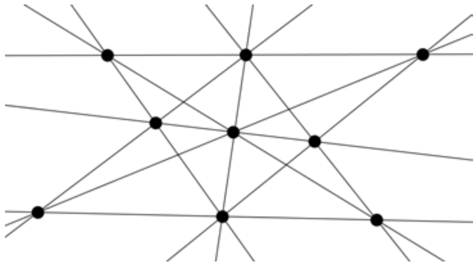


4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.

a. Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.
b. Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.
c. Déterminer la (les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.

Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



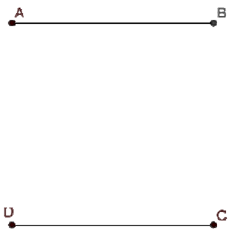
Exercice 2 (Proposé par la commission nationale)
Le plus court possible

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km. La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

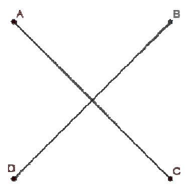
« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

fig.1



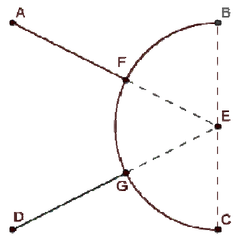
Assistant n°1

fig.2



Assistant n°2

fig.3

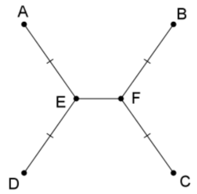


Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution : « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre ».
Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

fig. 4



Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.
Rappels de géométrie :
Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :
on a toujours $AB + BC \geqslant AC$ *;*
on a l'égalité $AB + BC = AC$ *si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

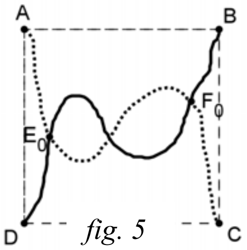


fig. 5

1. Revenons à notre réseau routier.
On admettra qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100 km de coté, comme dans le dessin ci-contre.

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure de gauche (*fig. 5*). En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré, ces deux points pouvant être confondus (*fig. 5*).
Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

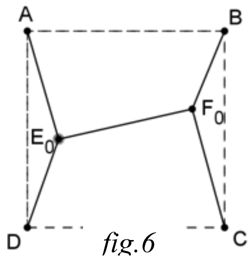


fig.6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (figure 7).

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b. Montrer que $EF \leqslant E_0F_0$.

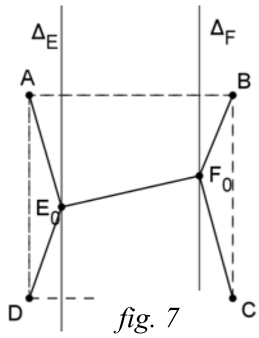


fig. 7

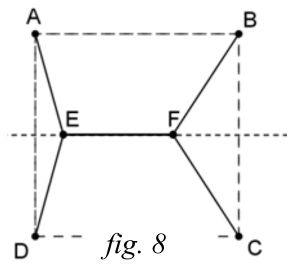


fig. 8

c. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].
b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*). Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

c. Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

Exercice 3 (Proposé par la cellule académique)
Élection paradoxale

Mon lycée a le sens de l'innovation. Pour désigner un délégué parmi les élèves de ma classe, chaque électeur est invité à classer dans l'ordre de ses préférences les trois candidats, Ali, Bela et Caro. Lors du dépouillement, 1 point est attribué au candidat classé premier, deux points au deuxième et quatre points au troisième. On fait le total et le candidat ayant le score le plus faible est déclaré élu.
Ali obtient 44 points. Il est déclaré élu, alors que 4 élèves seulement l'ont classé premier.
Caro obtient 45 points. Elle est celle que les électeurs ont classée le plus souvent en première position.
Bela obtient 51 points. Il est celui que les électeurs ont classé le plus souvent troisième.

1. Combien y a-t-il eu de votants ?
2. Combien de fois les électeurs ont-ils classé Caro en première position ? En deuxième ?

Exercice 4 (Proposé par la cellule académique)
Les cases rouges

On se donne un nombre entier n supérieur ou égal à 2.
Dans chacune des cases d'un tableau à n lignes et n colonnes, on place un des nombres entiers compris entre 1 et n, de sorte que chaque ligne contient une et une seule fois chacun de ces nombres, et chaque colonne contient une et une seule fois chacun de ces nombres.

On numérote les colonnes, de gauche à droite, de 1 à n, et on colorie en rouge chaque case qui contient un nombre strictement plus grand que le numéro de sa colonne.

1. Dans cette question, on considère le cas singulier $n = 7$.
Donner un exemple de tableau dans lequel on ne peut pas trouver deux lignes contenant le même nombre de cases rouges.

2. Prouver que, pour tout tableau construit selon la règle énoncée ci-dessus :
a. Il est impossible qu'une ligne ne contienne que des cases rouges ;
b. Il est impossible que deux lignes ne contiennent aucune case rouge.

3. On voudrait remplir le tableau – en respectant la règle – de telle sorte que toutes les lignes contiennent le même nombre de cases rouges.
a. Donner un exemple d'une telle réalisation dans le cas $n = 7$.
b. Prouver que c'est impossible pour $n = 2014$.