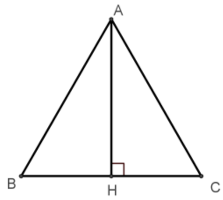
Olympiades académiques de mathématiques. Classes de première.

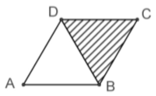
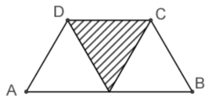
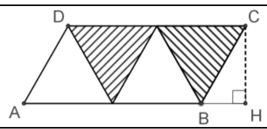
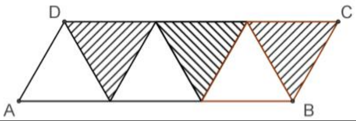
Éléments de solution

Exercice numéro 1 (national) Défi entre sœurs

Partie A



1. La hauteur [AH] du triangle équilatéral ABC est un des côtés de l'angle droit du triangle AHB. D'après le théorème de Pythagore $AH^2 = AC^2 - CH^2$. AC = 1 et CH = $\frac{1}{2}$. Donc AH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Calcul des longueurs des diagonales

			
Deux triangles	*Trois triangles*	*Quatre triangles*	*Six triangles*
La plus petite des diagonales a pour longueur 1, la plus grande deux fois la longueur de la hauteur du triangle, soit $\sqrt{3}$	Trapèze isocèle : les deux diagonales ont la même longueur, celle de la plus grande diagonale du cas précédent	Le triangle ACH rectangle en H fournit, grâce au théorème de Pythagore, la longueur de la diagonale [AC] : $AC^2 = AH^2 + CH^2$ $AC^2 = 6{,}25 + 0{,}75$. D'où AC = $\sqrt{7}$. La plus petite diagonale est la diagonale du cas précédent.	La plus petite diagonale est la plus grande du cas précédent. Pour la plus grande, on calcule la longueur de l'hypoténuse du triangle ACJ, rectangle en J, projeté orthogonal de C sur (AB). $AC^2 = 12{,}25 + 0{,}75$, d'où AC = $\sqrt{13}$

Partie B

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair**, on pose $n = 2p$, la plus grande des diagonales est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit a pour longueur $p + \frac{1}{2}$ et l'autre $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $L^2 = p^2 + p + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ donne le résultat demandé.
2. Lorsqu'on ajoute un triangle, la figure obtenue est un trapèze isocèle dont les diagonales ont toutes les deux la longueur L.
3. Dans le cas d'un parallélogramme constitué de 56 triangles, selon la question **1.** de cette partie, $L = \sqrt{813}$ et $l = \sqrt{757}$.

Partie C

1. Le nombre $p^2 + p$ (égal à $p(p + 1)$) est en effet un nombre pair. Son successeur est impair.
En revanche, $7^2 + 7 + 1 = 57$, multiple de 3…
2. $\sqrt{2}$, racine d'un nombre premier pair, ne peut figurer dans la suite des longueurs possibles. Cette suite est par construction croissante et $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$ en sont deux termes consécutifs.
3. La question est : existe-t-il un entier naturel p solution de l'équation $p^2 + p + 1 = 2\,015$? Cette équation s'écrit $\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 = 2\,014{,}25$ et 2 014,25 n'est le carré d'aucun décimal. La réponse est donc non.
4. 1 015 056, 25 est le carré de 1 007,5. L'équation $\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 = 1\,015\,056{,}25$ a donc deux solutions, 1 007 et – 1 008. Une seule répond au problème. La grande diagonale d'une figure de 2 014 triangles ou la petite d'une figure de 2 015 triangles conviennent.
5. Quelques essais semblent confirmer cette tendance : 0,9 est dépassé dès la première différence, 0,99 à la sixième. Seule une démonstration pourra le confirmer. Calculons donc : $L(p+1) - L(p) = \sqrt{p^2 + 3p + 3} - \sqrt{p^2 + p + 1}$

p	$L(p+1)$	$L(p)$	Différence
1	2,645751311	1,732050808	0,913700503
2	3,605551275	2,645751311	0,959799964
3	4,582575695	3,605551275	0,977024419
4	5,567764363	4,582575695	0,985188668
5	6,557438524	5,567764363	0,989674161
6	7,549834435	6,557438524	0,992395911

Ou encore :$L(p+1) - L(p) = \frac{\left(\sqrt{p^2+3p+3}\right)^2 - \left(\sqrt{p^2+p+1}\right)^2}{\sqrt{p^2+3p+3} + \sqrt{p^2+p+1}}$

Et enfin : $L(p+1) - L(p) = \frac{2 + \frac{2}{p}}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}}\right)}$

Où l'on voit que, pour les « grandes » valeurs de p (elles n'ont pas besoin d'être si grandes que cela, d'ailleurs), le numérateur comme le dénominateur de ce quotient ne cessent de se rapprocher de 2 ; le quotient est donc proche de 1.

Exercice numéro 2 (national) On est les rois !

Partie A

1. Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq 2x \leq 1$. Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $0 \leq 1 - x \leq \frac{1}{2}$ et on est ramené au cas précédent.

2. L'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est « étiré » sur l'intervalle [0, 1], l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est « replié » sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$puis lui aussi « étiré ».

Partie B

1. Les neuf images successives de ces deux nombres sont données dans le tableau :

x	x_1	x_1	x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
0, 33	0, 66	0, 68	0, 64	0, 72	0, 56	0, 88	0, 24	0, 48	0, 96	0, 08	0, 16

Les images successives de $\frac{1}{3}$ se stabilisent rapidement, celles de 0, 33 ne se stabilisent pas (le 0, 16 prédit cependant le retour de 0, 64 et donc un cycle). À droite, les premières images engendrées par 0, 6666666 confirment cette dispersion, plus lente.

0,66666666
0,66666668
0,66666664
0,66666672
0,66666656
0,66666688
0,66666624
0,66666752
0,66666496
0,66667008
0,66665984
0,66668032
0,66663936
0,66672128
0,66655744
0,66688512
0,66622976
0,66754048
0,66491904
0,67016192
0,65967616
0,68064768
0,63870464
0,72259072
0,55481856
0,89036288
0,21927424
0,43854848
0,87709695
…

2. - La fève ne change pas de position : l'équation $f(x) = x$ a pour solutions 0 (dans l'intervalle$\left[0, \frac{1}{2}\right]$) et $\frac{2}{3}$ (dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$).

- La fève revient à sa position initiale après deux opérations : on est amené à discuter en découpant l'intervalle [0, 1] en quatre. L'équation $f\big(f(x)\big) = x$ a pour solutions $\frac{2}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $\frac{4}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. On élimine 0 et $\frac{2}{3}$, qui sont naturellement réapparus.

- La fève revient à sa position initiale après trois opérations. Le tableau ci-dessous permet de suivre la discussion (on n'a pas dressé le tableau correspondant à la situation précédente…)

Intervalle	$\left[0, \frac{1}{8}\right]$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$	$\left[\frac{7}{8}, 1\right]$
Écriture de $f(x)$	$2x$	$2x$	$2x$	$2x$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$
Intervalle contenant $f(x)$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$
Écriture de $f\big(f(x)\big)$	$4x$	$4x$	$2-4x$	$2-4x$	$4x-2$	$4x-2$	$4-4x$	$4-4x$
Intervalle contenant $f\big(f(x)\big)$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$
Écriture de $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	$8x$	$2-8x$	$8x-2$	$4-8x$	$8x-4$	$6-8x$	$8x-6$	$8-8x$
Égalité à traiter	$7x = 0$	$9x = 2$	$7x = 2$	$9x = 4$	$7x = 4$	$9x = 6$	$7x = 6$	$9x = 8$
Solutions	exclu	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{7}$	exclu	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$

On remarque que les six nombres solutions sont éléments de deux *cycles* : $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$ d'une part, $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ d'autre part.

3. Atteindre sa cible, pour un nombre non nul, c'est d'abord atteindre 1, puisque 1 est l'autre nombre de l'intervalle [0, 1] dont l'image par f est 0. Tous les inverses des puissances entières de 2 atteignent leur cible (par doublement successif, puisqu'à chaque étape on obtient un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$). Le nombre $\frac{2}{3}$, égal à toutes ses images successives, n'atteint pas sa cible.

4. Les images successives de $\frac{2\,015}{2^{2015}}$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$ (elles sont obtenues par doublement successif) jusqu'à $\frac{2\,015}{2\,048}$, qui est supérieur. L'image de ce nombre est $\frac{33}{1\,024}$, dont les images sont encore inférieures à $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{33}{64}$, auquel succèdent $\frac{31}{32}, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}$, etc. jusqu'à $\frac{1}{2}$ et 1 puis 0.

5. En raisonnant sur les antécédents : 0 a comme antécédents lui-même et 1, 1 n'a comme antécédent que $\frac{1}{2}$, celui-ci ayant comme antécédents $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. On se donne un entier n et un entier p non nul inférieur à 2^n, et on cherche les antécédents de $\frac{p}{2^n}$. Ce sont les solutions des équations $\frac{p}{2^n} = 2x$ ou $\frac{p}{2^n} = 2(1-x)$. Il y en a deux, $\frac{p}{2^{n+1}}$, qui est inférieur à $\frac{1}{2}$, et $\frac{2^{n+1}-p}{2^{n+1}}$, qui lui est supérieur. Les prédécesseurs de 0 sont donc bien les quotients par une puissance de 2 des entiers inférieurs à cette puissance… et 0.

Partie C

1. On introduit une variable entière N, de valeur initiale 0. Avant la fin du **Tant que**, l'instruction N ← N+1 (Ou toute autre forme d'incrémentation) permet de compter le nombre d'itérations. Après la fin du **Tant que**, on donne une instruction d'affichage de N. Si le nombre introduit dans l'algorithme n'atteint pas la cible, l'algorithme ne s'arrête pas.

2. Le nombre 1/9 est à l'origine du cycle 2/9, 4/9, 8/9. L'algorithme tourne indéfiniment. Les images successives du nombre 1/9 subissent, de l'une à la suivante, des dégradations dues aux approximations inhérentes au calcul sur machine. Dans le tableau de droite, on voit que les images successives de 1/9, qui devraient être écrites 0,222222222 ; 0,444444444 et 0,888888888, perdent de la précision jusqu'à être « confondues » avec des rationnels de $[0,1]$ dont le dénominateur est une puissance de 2, ensemble dense dans $[0,1]$. (*)

0,444444656
0,888889313
0,222221375
0,444442749
0,888885498
0,222229004
0,444458008
0,888916016
0,222167969
0,444335938
0,888671875
0,22265625
0,4453125
0,890625
0,21875
0,4375
0,875

Par ailleurs, on prend toujours un risque en posant une condition du type $x > 0$ dans un programme d'ordinateur qui calcule sur des nombres en virgule flottante, mais ceci est une autre histoire.

(*) On pourra consulter les entretiens donnés par Sylvie Boldo sur https://interstices.info/jcms/c_36153/pourquoi-mon-ordinateur-calcule-t-il-faux ?

Exercice 3 concours jaune, Exercice 4 concours vert Une transformation

1 . Pour tout entier *n*, appelons S(*n*) la somme des chiffres de *n.*

a. La première équation s'écrit $n.S(n) = n$. Une solution est *n* = 0, les autres solutions sont les nombres dont la somme des chiffres est 1. Ce sont les puissances de 10.

b. La seconde équation s'écrit $n.S(n) = 2n$. Une solution est *n* = 0, les autres solutions sont les nombres dont la somme des chiffres est 2. Ce sont donc les sommes de deux puissances de 10 (éventuellement égales).

c. La troisième équation s'écrit $n.S(n) = 36$. Les décompositions de 36 en produit de nombres entiers positifs sont : 1 x 36, 2 x 18, 3 x 12, 4 x 9, 6 x 6 (chacun des deux, *n* comme *S*(*n*) pouvant a priori jouer les deux rôles). Les nombres s'écrivant avec un seul chiffres sont égaux à la somme de leurs chiffres. Cela fournit la première solution *n* = 6. Pour les autres, il faut chercher parmi les nombres à deux chiffres dont la somme n'en a qu'un. Cela fournit la deuxième solution, *n* = 12.

2. Équation $n.S(n) = 2\,015$. Les produits de deux nombres égaux à 2 015 sont : 1 x 2 015, 5 x 403, 13 x 155, 31 x 65. Dans ces produits, aucun des nombres n'est la somme des chiffres de l'autre. Il n'y a pas de solution.

3. *a.* Un nombre de quatre chiffres est supérieur à 1000. Pour que son produit par un entier soit compris entre 2 000 et 2 100, il faut que cet entier soit 2. Les nombres supérieurs à 1 000 dont la somme des chiffres est 2 sont 1 001, 1 010 et 1 100. Seuls les deux premiers conviennent.

b. Un nombre à deux chiffres a une somme des chiffres comprise entre 1 et 18. Le plus grand produit d'un nombre à deux chiffres par la somme de ses chiffres est donc 1782, qui est inférieur à 2 000.

c. Pour qu'un nombre compris entre 100 et 199 soit transformé en un nombre compris entre 2 000 et 2 100, il faut que la somme de ses chiffres soit comprise entre 11 et 19. On peut éliminer 19, 18 et 17 : pour qu'un nombre de trois chiffres ait une sommes des chiffres égale à 17, 18 ou 19, il faut qu'il soit supérieur à 179, et 179 x 17 = 3 043.

Complétons le tableau ci-contre, qui répertorie les multiples compris entre 2 000 et 2 100 des entiers compris entre 11 et 16 :

Les produits dans lesquels le premier facteur est la somme des chiffres de l'autre sont des solutions.

Il y en a 4.

11	12	13	14	15	16
11 x 182	12 x 167	13 x 154	14 x 143	15 x 134	16 x 125
11 x 183	12 x 168	13 x 155	14 x 144	15 x 135	16 x 126
11 x 184	12 x 169	13 x 156	14 x 145	15 x 136	16 x 127
11 x 185	12 x 170	13 x 157	14 x 146	15 x 137	16 x 128
11 x 186	12 x 171	13 x 158	14 x 147	15 x 138	16 x 129
11 x 187	12 x 172	13 x 159	14 x 148	15 x 139	16 x 130
11 x 188	12 x 173	13 x 160	14 x 149	15 x 140	16 x 131
11 x 189	12 x 174	13 x 161	14 x 150		
11 x 190	12 x 175				

7	8	9	10
7 x 286	8 x 250	9 x 223	10 x 200
	8 x 251	9 x 224	10 x 201
Pas	8 x 252	9 x 225	10 x 202
	8 x 253	9 x 226	10 x 203
de	8 x 254	9 x 227	10 x 204
	8 x 255	9 x 228	10 x 205
solution	8 x 256	9 x 229	10 x 206
	8 x 257	9 x 230	10 x 207
	8 x 258	9 x 231	10 x 208
	8 x 259	9 x 232	10 x 209
	8 x 260	9 x 233	10 x 210
	8 x 261		
	8 x 262		

On réalise un tableau analogue avec les multiples des nombres de 200 à 299 compris entre 2 000 et 2 100. Les multiplicateurs sont cette fois compris entre 7 et 10, et on élimine les produits dont un chiffre du second facteur est supérieur au premier.

Il apparaît quatre solutions dans ce tableau comme dans le précédent. Caro a donc raison.

Pour étudier la proposition d'Ali, on tient compte du fait que, pour obtenir un nombre compris entre 2 000 et 2 100 comme produit d'un entier par un autre, compris entre 300 et 399, il est nécessaire que le premier facteur du produit soit 6.

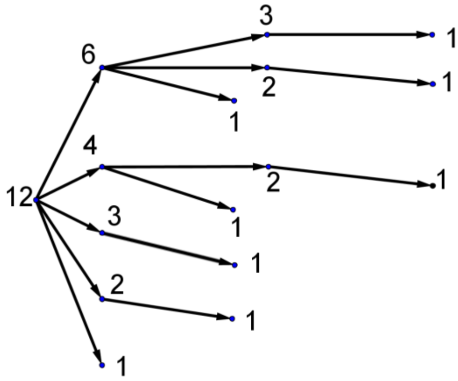
Les nombres compris entre 300 et 399 dont la somme des chiffres est 6 sont 303, 312, 321 et 330. Les produits par 6 de ces nombres sont : 1 818, 1 872, 1 926 et 1 980. Ali a donc raison.

Exercice 4 concours jaune Temps de calcul

1. Les suites possibles n'ont pas toutes la même fréquence d'occurrence. Faisons un arbre. De haut en bas, les probabilités d'occurrence qu'on peut attribuer à chacune des branches sont :

$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$ pour chacune des trois premières, $\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$ pour les deux suivantes, puis $\frac{1}{5}$ pour chacune des trois dernières.

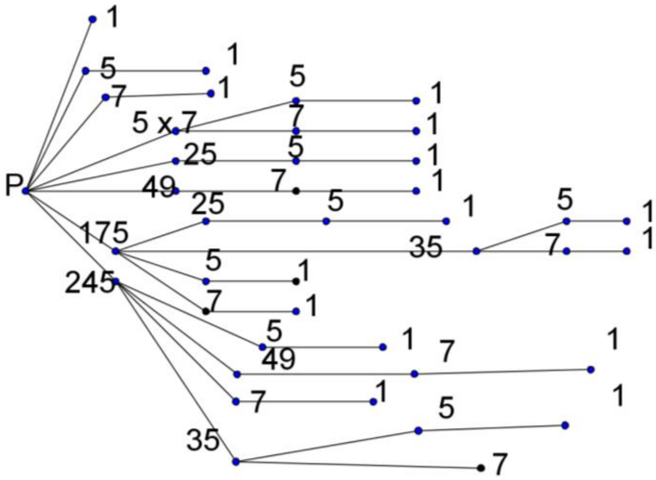
L'espérance mathématique du temps de calcul est donc : $T=\frac{1}{5}\left(3\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2\right)+1\right)$, soit $T=\frac{61}{30}$



2. Les diviseurs stricts de P sont 1, 5, 7, 25, 35, 49, 175, 245. L'arbre décrivant les séquences de calcul possibles conduisant de P à 1. Est reproduit sur la figure de droite).

L'arbre compte :

- une branche de longueur 1 (probabilité $\frac{1}{8}$)
- 2 branches de longueur 2 (probabilités $\frac{1}{8},\frac{1}{8},$)
- 8 branches de longueur 3 (probabilités $\frac{1}{8}\times\frac{1}{2},\frac{1}{8}\times\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\times\frac{1}{4},\frac{1}{8}\times\frac{1}{4},\frac{1}{8}\times\frac{1}{4},\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}$)
- 6 branches de longueur 4 (probabilités $\frac{1}{8}\times\frac{1}{4},\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2},\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2},\frac{1}{8}\times\frac{1}{4},\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2},\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$)



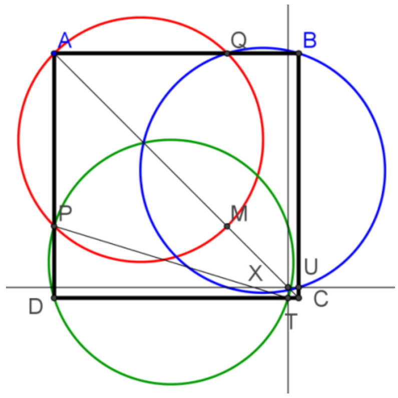
Résumons :

- Probabilité d'un parcours de longueur 1 : $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'un parcours de longueur 2 : $\frac{1}{4}$
- Probabilité d'un parcours de longueur 3 : $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'un parcours de longueur 4 : $\frac{1}{8}$

Espérance mathématique du temps de calcul : $T=\frac{1}{8}\times1+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{8}\times4=\frac{21}{8}$

Exercice 3 concours blanc Exercice 4 concours vert Un carré et trois cercles

Solution proposée par Pierre BORNSZTEIN, professeur au lycée Alfred Kastler de Cergy, auteur du problème.



1)a) Analysons un peu la configuration : Comme C_1 est de diamètre $[AM]$, les triangles APM et AQM sont rectangles respectivement en P et en Q. Ces deux points sont donc les projetés orthogonaux respectifs de M sur $[AD]$ et $[AC]$. De plus, comme M est sur la diagonale du carré $ABCD$ de côté 10 cm, c'est que $AQMP$ est un carré, de diagonale 10 cm et donc de côté $5\sqrt{2}$ cm.

On a $PD = AD - AP = 10 - 5\sqrt{2} = 5(2 - \sqrt{2})$ et $PT = 10$ donc, d'après le théorème de Pythagore dans PDT rectangle en D, il vient

$$DT^2 = PT^2 - PD^2 = 25(4\sqrt{2} - 2),$$

et donc $DT = 5\sqrt{4\sqrt{2} - 2}$.

b) Par la symétrie s orthogonale par rapport à (AC), on a $s(A) = A$, $s(M) = M$, $s(C) = C$, $s(D) = B$ et donc $s(P) = Q$ et $s(T) = U$ puisque s conserve les segments et les distances. En particulier, le triangle TCU est rectangle isocèle en C. Le point X est donc tel que $TCUX$ soit un carré, et ainsi $X \in [AC]$.

On note O le milieu de $[PT]$, et donc centre de C_2. On note H le projeté orthogonal de M sur $[CD]$. Ainsi, $DPMH$ est un rectangle.

Puisque T est sur le côté $[CD]$ du carré, le théorème des milieux assure que O est sur la médiatrice commune Δ de $[DP]$ et $[HM]$, qui est donc la parallèle à $[CD]$ passant par O.

On a $DH = PM = 5\sqrt{2}$.
Or, $\sqrt{2} > 1$ donc $4\sqrt{2} - 2 > 2$.
Ainsi, d'après a), on a $DH < DT$, ce qui prouve que $H \in [DT]$.
Or, DPT est rectangle en D donc $D \in C_2$. Le segment $[DT]$ est donc une corde de C_2, ce qui prouve que H est à l'intérieur de C_2.
Par symétrie orthogonale par rapport au diamètre de C_2 porté par Δ (et parallèle à (CT)), le point M est donc à l'intérieur de C_2.

Revenons au point X. La droite Δ est perpendiculaire à (XT) et passe par le centre O de C_2. De plus, on a $T \in C_2$. On note R le projeté orthogonal de O sur (TX).

Le point X est donc intérieur à C_2 si et seulement si $TX < 2TR$.
Or, on a $2TR = PD = AD - AP = CD - DH$.
D'autre part, on a $TX = CT = DC - DT$.
Ainsi, le point X est à l'intérieur de C_2 si et seulement si $DH < DT$, et nous avons vu ci-dessus que cette dernière inégalité est vraie.
Finalement, le point X est à l'intérieur de C_2.

c) Le disque C_1 recouvre le carré $AQMP$.
Les points P, D, T sont sur C_2 et les points M et X sont à l'intérieur de C_2.
Par suite, C_2 recouvre la surface du pentagone $DPMXT$.
Par symétrie des rôles, C_2 recouvre la surface du pentagone $BQMXU$.

Ainsi, les trois cercles recouvrent tout $ABCD$ sauf une partie du carré $TCUX$. Pour conclure, il suffit de prouver que l'aire de $TCUX$ ne dépasse pas $0,25\%$ de celle de $ABCD$, c'est-à-dire que $CT < \frac{1}{20}DC$.
Cela revient à prouver que $DT > \frac{19}{20}DC$.
Or, on a vu au a) que $DT = 5\sqrt{4\sqrt{2}-2}$ et on a $DC = 10$. Il s'agit donc de prouver que $\sqrt{4\sqrt{2}-2} > 1,9$, ou encore que $4\sqrt{2}-2 > (1,9)^2$, c'est-à-dire $\sqrt{2} > 1,4025$, ce qui est vrai.

Ainsi, les disques C_1, C_2 et C_3 recouvrent plus de $99,75\%$ de la surface du carré $ABCD$.

2) Par l'absurde : supposons que les trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm, recouvrent entièrement $ABCD$.

Comme le carré a quatre sommets et qu'il n'y a que trois cercles, deux des sommets sont recouverts par un même cercle, disons Γ_1. Comme Γ_1 est de diamètre 10 cm, soit plus petit que la longueur de la diagonale du carré, c'est que Γ_1 recouvre deux sommets consécutifs, disons A et B. De plus, puisque $AB = 10$ cm, c'est que $[AB]$ est un diamètre de Γ_1. Mais alors, hormis ceux de $[AB]$, le cercle Γ_1 ne recouvre aucun autre point du bord de $ABCD$.
On en déduit que C est recouvert par un des deux autres cercles, disons Γ_2. De même que ci-dessus, le cercle C_2 ne peut recouvrir aucun point de $]AD[$. Par suite, tout $]AD[$ est recouvert par Γ_3, ce qui implique que $[AD]$ est un diamètre de Γ_3. Mais alors, comme ci-dessus, le cercle Γ_3 ne peut recouvrir aucun point de $]BC[$. Par suite, $]BC[$ est entièrement recouvert par Γ_2, et donc $[BC]$ est un diamètre de Γ_2.

Par conséquent, aucun des trois cercles ne recouvre $]CD[$. Contradiction.

Il est donc impossible de recouvrir toute la surface du carré $ABCD$ par trois disques Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm.

Exercice 4 concours blanc Suite de fonctions, suite d'équations

1. L'équation $x^2 - 1 = 0$ a pour ensemble de solutions $S_1 = \{-1, 1\}$.
L'équation $P_2(x) = 0$ s'écrit $(x^2 - 1 - 1)(x^2 - 1 + 1) = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S_2 = \left(\sqrt{2}\,, -\sqrt{2}\,, 0\right)$.
L'équation $P_3(x) = 0$ s'écrit $\left((x^2-1)^2 - 1 - 1\right)\left((x^2-1)^2 - 1 + 1\right) = 0$,
ou encore $\left(x^2 - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x^2 - 1 + \sqrt{2}\right)(x^2-1)^2 = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S_3 = \left\{\sqrt{1+\sqrt{2}}\,, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\,,\ 1, -1\right\}$

2. L'équation $P_1(x) = 1$ a pour ensemble de solutions $\Sigma_1 = \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$
L'équation $P_2(x) = 1$ s'écrit $\left(x^2 - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x^2 - 1 + \sqrt{2}\right) = 0$. Son ensemble de solutions est $\Sigma_2 = \left\{\sqrt{1+\sqrt{2}}\,, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}$
L'équation $P_3(x) = 1$ s'écrit$\left((x^2-1)^2 - 1 - \sqrt{2}\right)\left((x^2-1)^2 - 1 + \sqrt{2}\right) = 0$. Ses solutions sont celles de $\left(x^2 - 1 - \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(x^2 - 1 + \sqrt{1+\sqrt{2}}\right) = 0$.
Son ensemble de solutions est donc $\Sigma_3 = \left\{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}\,, -\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right\}$.

3. L'équation $P_{2\,015}(x) = 0$ s'écrit aussi $P_{2\,014}^2(x) - 1 = 0$, ou encore
$(P_{2014}(x) - 1)(P_{2014}(x) + 1) = 0$.
D'où on déduit que les solutions de $P_{2\,015}(x) = 0$ se partagent en deux catégories :

- Les solutions de $P_{2\,014}(x) = 1$;
- Les solutions de$P_{2\,014}(x) = -1$.

Les solutions de $P_{2\,014}(x) = -1$ sont les solutions de $P_{2013}(x) = 0$.
Au passage, notons que si on retrouve parmi les solutions de $P_{2\,015}(x) = 0$ les solutions de $P_{2013}(x) = 0$, de proche en proche on est sûr d'y retrouver les solutions de $P_1(x) = 0$, c'est-à-dire 1 et -1. De façon plus rustique, on peut observer que 1 et – 1 sont solutions des équations s'écrivant $\left(\left((x^2-1)^2 - 1\right)^2 \ldots.\right)^2 - 1 = 0$ dès que les paires de parenthèses sont en nombre impair.
Les solutions de $P_{2\,014}(x) = 1$ sont les solutions de $P_{2013}^2(x) = 2$, qui se partagent en deux catégories :

- Les solutions de $P_{2013}(x) = \sqrt{2}$;
- Les solutions de $P_{2013}(x) = -\sqrt{2}$.

Les premières sont les solutions de $P_{2012}^2(x) = 1 + \sqrt{2}$. Les secondes sont les solutions de $P_{2012}^2(x) = 1 - \sqrt{2}$, autrement dit il n'y en a pas.
Conclusion provisoire : l'ensemble des solutions de $P_{2\,015}(x) = 0$ est la réunion de l'ensemble des solutions de $P_{2013}(x) = 0$ et de l'ensemble des solutions de $P_{2013}(x) = \sqrt{2}$. Ces deux ensembles sont disjoints.
Intéressons-nous aux solutions de $P_{2013}(x) = \sqrt{2}$. Elles sont les solutions de $P_{2012}^2 = 1 + \sqrt{2}$, c'est-à-dire les solutions de $P_{2012}^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{2}}$ ou de $P_{2012}^2 = 1 - \sqrt{1+\sqrt{2}}$. La seconde catégorie est vide. Les racines de $P_{2012}^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{2}}$ sont celles de $P_{2012} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ ou celles de $P_{2012} = -\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$. Comme précédemment, les secondes ne mènent à rien, les premières sont les solutions de $P_{2011}^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$.
De proche en proche, on en arrive aux racines de $P_1(x) = a$, où a est un nombre réel supérieur à 1. Il y en a donc 2.
Autrement dit, si on note C_{2015} le nombre de solutions de $P_{2\,015}(x) = 0$, et C_n le nombre de solutions de $P_n(x) = 0$, on peut écrire :

$$C_{2015} = C_{2013} + 2$$

La suite des termes d'indice impair est une suite arithmétique de raison 2. Comme $P_1(x) = 0$ a deux solutions, $P_{2\,015}(x) = 0$ en a 2 016.