MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Versailles

Sujet séries STI2D, STL, ST2S, STD2A

Mercredi 18 mars de 8 heures à 12 heures

(Petite variation autorisée selon les horaires propres à l'établissement)

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

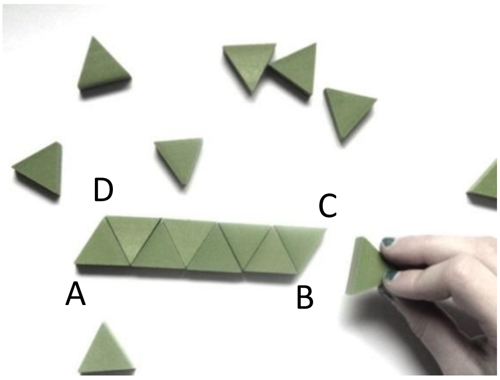
Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 3 heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

Défi entre sœurs



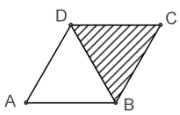
Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].

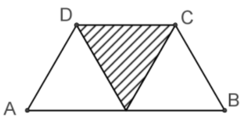
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

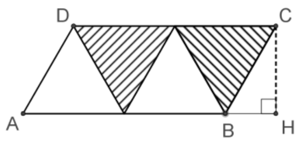
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



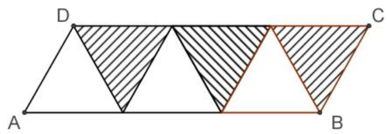
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.
2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?
3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

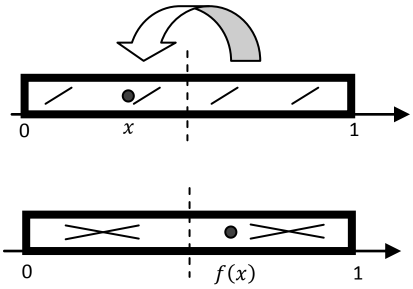
Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :
1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »
2^{e} propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »
On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.
2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?
3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.
5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

Exercice numéro 2
(proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].
2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0, 33 ? Commenter.
2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.
4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?
5. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).
2. D'après les questions **B.5**. ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

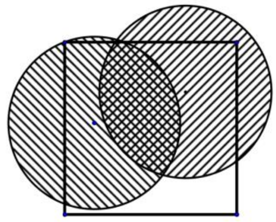
Annexe

Variables
    x est un élément de $[0\,,1]$
Début
    Saisir le nombre x compris entre 0 et 1
    Tant que $x \neq 0$ **faire**
        Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**
            x **prend la valeur** $2\,x$
        Sinon
        x **prend la valeur** $2(1-x)$
    Fin tant que
Fin

Exercice numéro 3

(proposé par le jury académique)

Trois disques couvrent-ils un carré ?



On voudrait recouvrir la surface d'un carré de côté 10 cm avec des disques identiques, de rayon 5 cm. Sur la figure ci-contre, une tentative est esquissée, avec les deux premiers disques.

Dans la suite, on propose d'étudier une première tentative avant de se prononcer sur l'existence d'une solution au problème.

Soit ABCD un carré de côté 10 cm.

1. Soit M le point de la diagonale [AC] situé à 10 cm de A, et soit C_1 le cercle de diamètre [AM]. Le cercle C_1 recoupe le côté [AD] en P et le côté [AB] en Q.
Soit T le point du côté [CD] situé à 10 cm du point P, et soit C_2 le cercle de diamètre [TP].
Soit U le point du côté [BC] situé à 10 cm du point Q, et soit C_3 le cercle de diamètre [UQ].
a. Calculer DT.
b. On appelle X le point d'intersection de la parallèle à (CD) passant par U et de la parallèle à (BC) passant par T. Prouver que les points M et X sont à l'intérieur de C_2.
c. On dit qu'un cercle *recouvre* un point lorsque ce point est sur le cercle ou à l'intérieur du cercle. Prouver qu'à eux trois, les cercles C_1, C_2 et C_3 recouvrent plus de 99, 75% de la surface du carré ABCD ;

2. Prouver qu'il est impossible de recouvrir toute la surface du carré ABCD avec trois disques Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Une transformation

Pour tout entier naturel n écrit dans le système décimal, on effectue le produit de n par la somme de ses chiffres, qu'on note $R(n)$. Par exemple, $R(2\,015) = 2\,015 \times (2+0+1+5) = 16\,120$.

1. Résoudre chacune des équations suivantes :

- *a.* $R(n) = n$;
- *b.* $R(n) = 2n$;
- *c.* $R(n) = 36$.

2. Existe-t-il un entier n tel que $R(n) = 2\,015$?
3. On s'intéresse à présent aux nombres n dont l'image par R est comprise entre 2 000 et 2 100.
a. Y a-t-il des nombres n s'écrivant avec 4 chiffres et tels que $R(n)$ soit compris entre 2 000 et 2 100 ?
b. Y a-t-il des nombres n s'écrivant avec 2 chiffres et tels que $R(n)$ soit compris entre 2 000 et 2 100 ?
c. Caro dit que, parmi les nombres dont l'image par R est comprise entre 2 000 et 2 100, il y en a autant entre 100 et 200 qu'entre 200 et 300. Bela pense le contraire. Sans les départager, Ali proclame « de toutes façons, il n'y en a aucun entre 300 et 400 ». Qui a raison ?