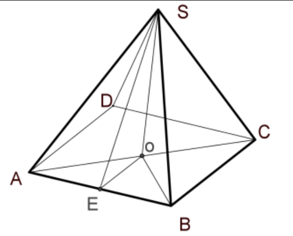
Olympiades académiques de mathématiques Classes de première Session 2016
Éléments de solution

Exercices nationaux

1. (Toutes séries) Échanges thermiques

1. _a. b. c._ Calculs de compacité

	Cube de côté a	Demi-sphère de rayon r	Pyramide à base carrée de côté a, de hauteur a	
Surface extérieure	$6a^2$	$3\pi r^2$	$a^2\left(\sqrt{5}+1\right)$	
Volume	a^3	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{3}a^3$	Le calcul de la surface extérieure demande celui de la hauteur SE, qui est l'hypoténuse de SOE, rectangle en O
Facteur de compacité	$\frac{6}{a}$	$\frac{9}{2r}$	$\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{a}$	

_d._ Les échanges thermiques avec l'extérieur sont d'autant plus grands que le facteur de compacité est élevé. Note : Le facteur de compacité est également pris en compte pour analyser les coûts de packaging, de stockage ou de transport d'une marchandise.
2. _a._ On développe le second membre…
_b._ Le second membre est un nombre positif, donc le premier aussi.
_c._ L'inégalité précédente, valable pour tout triplet (a, b, c), s'applique à tout triplet de produit 1, et aux racines cubiques…
_d._et **_e._** Le volume d'un tel pavé est xyz et sa surface extérieure $2(xy + yz + zx)$, d'où le résultat. Comme $xyz = 1$, l'inégalité précédente s'applique au triplet $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ dont le produit vaut aussi 1, d'où il résulte que $c \geq 6$. Et comme ce minorant est atteint en (1, 1, 1), c'est un minimum. Le cube de côté 1 réalise le minimum du facteur de compacité des pavés de volume 1. Aucun autre pavé droit de volume 1 de le réalise : l'inégalité **2. _b._** serait stricte.

3. _a._ Faire $c = 1$ pour obtenir l'équation proposée.
_b._ Comme $p \leq q \leq r$, la somme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ est majorée par $\frac{3}{p}$, qui est donc supérieur à $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, si $p \leq 2$, la somme des trois fractions unitaires est supérieure strictement à $\frac{1}{2}$.
_c._ et **_d._** Comme précédemment, si $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{6}, \frac{2}{q} \geq \frac{1}{6}$. D'autres majorations s'imposent dans les cas qui suivent.
Tableau final. On lit les triplets solutions en colonne.

p	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	6
$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
q	7	8	9	10	11	12	5	6	7	8	5	6	6
r	42	24	18	15		12	20	12		8	10		6

2. (Série S) Liber abaci

1. La première décomposition proposée comporte des dénominateurs identiques, la seconde n'est pas une somme d'inverses d'entiers. On peut écrire $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

2. *a.*

k	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{pn - q}$	$\boldsymbol{qn}$
1	4	17	5	3	85
2	3	85	29	2	2 465
3	2	2 465	1 233	1	3 039 345
4	1	3 039 345	3 039 345	0	

b. À l'issue du *N*-ième tour de boucle, le quotient $\frac{p_N}{q_N}$, qui est nul, apparaît comme la différence entre $\frac{p_1}{q_1}$ et une somme de fractions unitaires. Donc $\frac{p}{q}$ est bien somme de fractions unitaires. Par ailleurs

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k} < \frac{1}{n_k - 1} - \frac{1}{n_k} = \frac{1}{(n_k - 1)n_k} \leq \frac{1}{n_k}$$

prouve que la suite (n_k) est strictement décroissante.

c. On a $p_k n_k - q_k = p_{k+1}$ et $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$, et donc $p_{k+1} - p_k = p_k(n_k - 1) - q_k$. Le membre de droite est strictement négatif, donc la suite des p_k est strictement décroissante. Il s'ensuit qu'il existe un certain *N* pour lequel $p_N = 0$. L'algorithme s'arrête.

3. *a.* Le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{p}{q}$ est 1. On pourrait accepter 1 comme « fraction unitaire », mais dès que $\frac{p}{q} \geq 2$, 1 sera répété, ce qui est dans tous les cas interdit.

b. Le premier membre de la première inégalité à montrer comporte a termes tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2a}$, dont au moins un est strictement supérieur à $\frac{1}{2a}$, car $a + 1 < 2a$ dès que $a > 1$. Le premier membre de la seconde inégalité comporte $3a$ termes, les a premiers sont les mêmes que ceux de la sommes précédente. Pour les autres, on reconnaît : $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+2} + \frac{1}{2a+3} + \cdots + \frac{1}{2a+2a}$ que l'on minore en faisant jouer à $2a$ le rôle antérieur de a.

c. $\frac{1}{a+1} < \frac{1}{4}$. En ajoutant à ce premier terme, inférieur à 1, les fractions unitaires « consécutives », on finit par dépasser 1, question précédente (inégalité de droite). Notons b le dernier entier supérieur à a pour lequel la somme est encore inférieure à 1. Bien sûr $b > 2a$, question précédente (inégalité de gauche).

d. Considérons un rationnel $\frac{p}{q}$ supérieur à 1 et écrivons $\frac{p}{q} = n + \frac{p'}{q'}$, expression dans laquelle n est la partie entière de $\frac{p}{q}$. Une écriture égyptienne de $\frac{p'}{q'}$ demande des fractions unitaires de dénominateurs inférieurs strictement à un certain N_0. Si on écrit $n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$, on va décomposer chacun des 1 en somme de fractions unitaires (en prenant garde que les dénominateurs soient tous différents).

Pour le premier 1, Utiliser le résultat de la question ***c.*** en prenant pour premier dénominateur $a + 1$ un nombre supérieur à N_0. On peut approcher 1 à moins de $\frac{1}{b+1}$. Le rationnel restant est inférieur à $\frac{1}{b+1}$ et admet une écriture égyptienne dont tous les dénominateurs sont supérieurs à $b + 1$.

Pour l'éventuel second 1, on recommence, en prenant pour premier dénominateur un entier supérieur à tous ceux utilisés jusque-là.

Ainsi de suite.

Pour varier à l'infini les décompositions, on peut par exemple augmenter de 1 le premier dénominateur intervenant dans la décomposition du premier 1…

3. (séries autres que S) Demi-tour !

1. Supposons qu'une des deux opérations concerne le pion *M* et l'autre le pion *N*. Supposons *N* < *M*. On commence par retourner le pion *M*. Tous les pions de numéro inférieur ou égal à *M* changent de couleur. On retourne le pion *N* et tous les pions de numéro inférieur ou égal à *N* changent de couleur. Résultat : seuls les pions de numéros compris entre *N* +1 et *M* ont changé de couleur. Si on pratique ces opérations dans l'ordre inverse, les mêmes pions sont retournés une fois, les mêmes deux fois. L'ordre des opérations n'intervient donc pas.

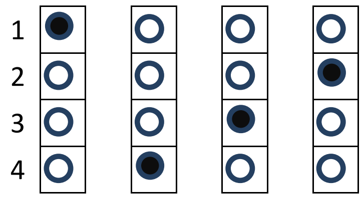
2. Deux opérations identiques s'annihilent.

3. A : 1, B : 4 puis 3 puis 2 puis 1, C : 3 puis 2, D : 4 puis 3 puis 2

4. ***a.*** et ***b.*** Comme on parcourt la colonne de n à 1, tous les jetons noirs rencontrés sont blanchi. Un jeton noir à partir duquel on réalise une opération n'est plus concerné par les suivantes, donc reste blanc. On réalise au maximum n opérations (cas d'une alternance de jetons noirs et blancs, le jeton n étant noir). Soit maintenant une méthode de blanchiment. L'ordre des opérations ne compte pas : on peut donc partir du dernier jeton, remonter jusqu'au premier, et neutraliser les doublons. Cela coïncide avec la méthode proposée, qui est minimale.

5. ***a.*** On utilise le mode opératoire précédent : chaque jeton noir rencontré, en partant du jeton n, est blanchi ou laissé blanc s'il l'était déjà, en laissant intacts ceux du dessous : c'est bien cela l'important. Cette méthode blanchit tout.

b. Dans le plateau ci-contre, le pion noir circule au fur et à mesure des opérations et rejoint sa place initiale. Le tableau de 4 cases ne peut pas être blanchi.



6. Jeu à deux dimensions

On peut appliquer la méthode de la question **4.** colonne par colonne, en commençant par la colonne n. Cela garantit le blanchiment de la colonne n. On passe ensuite au dernier jeton de la colonne $n-1$ et on remonte la colonne, etc. On passe ainsi par toutes les cases, qui peuvent donc être toutes blanchies.

7. Trois dimensions

Le jeu a la forme d'un cube. Les pions sont numérotés par des triplets (i, j, k) où i est le numéro de la *couche*, j le numéro de la *tranche* (compté de gauche à droite), k le numéro du *rang* (compté de l'arrière vers l'avant). En changeant de couleur le pion (i, j, k), on change la couleur de tous les pions dont la couche, la tranche et le rang ont des numéros inférieurs ou égaux respectivement à i, j, k.

Exercices académiques

4. (série S) Tant qu'il y aura des sommes

1. 0 est élément de A et de B, car 0 + 0 est la seule façon de l'obtenir comme somme. Pour la suite on peut rassembler dans A les nombres impairs de 1 à 2 012 et 2 et dans B les nombres pairs de 2 à 2 014. Les seuls nombres qui ne sont pas obtenus comme leur somme avec 0 sont 2 013 (1 006 + 1 007), 2 015 (1 007 + 1 008) et 2 016 (2 + 2 014). Il y a ainsi 1 008 nombres dans A comme dans B.

2. Si A et B ont chacun n éléments, les nombre de couples (a, b) faits d'un élément de A et d'un élément de B est n^2. C'est aussi le nombre maximal de sommes réalisées avec un élément de A et un élément de B. Une condition nécessaire sur n est donc $n^2 \geq 2\,016$. Le premier carré d'entier supérieur à 2 016 est 45.

3. On peut composer A avec les entiers compris entre 0 et 44 (ce qui fait 45 éléments) et B avec les multiples de 45, de 0 à 44 x 45 = 1980 (ce qui fait aussi 45 éléments). Pour tout entier m compris entre 0 et 2 016, la division euclidienne de m par 45 donne un quotient q et un reste r inférieur strictement à 45. Le nombre $45q$ est un élément de B, le nombre r est un élément de B.

5. (série S) La sécurité dans le désordre

1. ***a.*** Des six nombres constitués des trois chiffres 1, 2 et 3 apparaissant chacun une unique fois, un est le *code initial*, deux permettent l’ouverture et les trois autres ne la permettent pas. Si 123 permet d’ouvrir, le *code initial* est 231 ou 312 (les trois sont fabriqués par permutations circulaires) et 132, 213 et 321 conduisent à l’échec.
b. Les *codes initiaux* ont un chiffre commun avec 123. Ce sont donc 132, 213 et 321.
c. 123 permet d’ouvrir la porte si le *code initial* est 231 ou 312, 231 « ouvre » 312 et 123, 132 ouvre 321 et 213 et 213 ouvre 132 et 321. Les six *codes initiaux* possibles sont représentés. La porte s’ouvre.
d. Il y a deux groupes de trois nombres $\{123, 231, 312\}$ et $\{132, 321, 213\}$ dans lesquels chacun des trois nombres libère les deux autres s’ils sont utilisés comme *codes initiaux.* En prenant un nombre dans chaque, on libère quatre codes, mais les deux restant ne peuvent être libérés par un même nombre. On ne peut donc trouver une liste de trois nombres ouvrant la porte.

2. ***a.*** Un *code initial* à quatre chiffres est fixé. Sans perdre la généralité, notons-le 1234. Dans tout nombre ouvrant le code 1234, le « 1 » prend la place d’un autre chiffre, par exemple « 2 ». Soit il échange sa place avec « 2 », et les deux autres chiffres doivent aussi échanger leurs places. Soit il prend la place d’un troisième, par exemple « 3 », et « 4 » doit donner sa place à « 3 ». Pour chaque changement de place du « 1 », il y a trois dispositions possibles. Comme il y a trois choix pour déplacer « 1 », on trouve que la liste des codes ouvrant le *code initial* 1234 contient 9 nombres de quatre chiffres.

b. Considérons la suite 1234 – 2341 – 3412 – 4123.

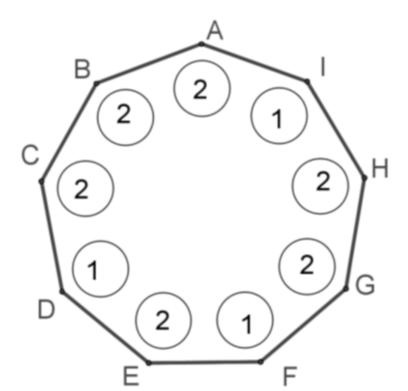
1 2 3 4	**2 3 4 1**	**3 4 1 2**	**4 1 2 3**
2 1 4 3		2 1 4 3	2 3 4 1
2 3 4 1		2 1 3 4	2 4 3 1
2 4 1 3		2 3 4 1	2 3 1 4
3 1 4 2	3 2 1 4		3 2 1 4
3 4 1 2	3 1 2 4		3 2 4 1
3 4 2 1	3 4 1 2		3 4 1 2
4 1 2 3	4 2 3 1	4 3 2 1	
4 3 1 2	4 1 3 2	4 2 3 1	
4 3 2 1	4 1 2 3	4 1 2 3	
	1 4 3 2	1 2 3 4	1 4 3 2
	1 4 2 3	1 3 2 4	1 3 4 2
	1 2 3 4	1 2 4 3	1 2 3 4

Le tableau ci-contre montre les ensembles de codes libérés par chacun des 4 nombres proposés. Chacun des termes de la suite se retrouve dans les trois groupes engendrés par les autres. Quatre autres codes sont répétés. Les 24 permutations possibles sont obtenues.
c. Considérons la suite 12345 – 23415 – 34125 – 41235 – 51234 – 52341 – 53412 – 54123, construite en ajoutant 5 à gauche ou à droite de chacun des quatre motifs précédents.
Si le code à casser se termine par 5, ses quatre premiers chiffres résultent de l’effet d’une permutation sans point fixe sur un des termes, disons X, de la suite 1234 – 2341 – 3412 – 4123. Il est alors cassé par 5 suivi de X. S’il ne se termine pas par un 5, 5 est un de ses chiffres autre que le dernier et un échange entre 5 et le dernier chiffre ramène à la situation précédente. Cet échange ne nous fait pas sortir de l’ensemble des permutations admissibles. On a donc trouvé une suite de huit combinaisons qui casse tous les codes. Huit n’est cependant pas un minimum…

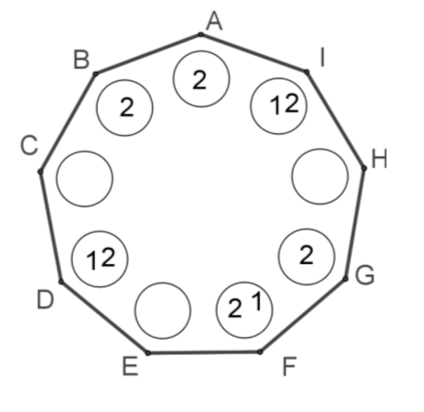
On consultera avec bonheur la contribution de nos collègues entraîneurs de l’Olympiade française de mathématiques, Pierre BORNSZTEIN et Vincent JUGÉ.

6. (séries autres que S) Table tournante

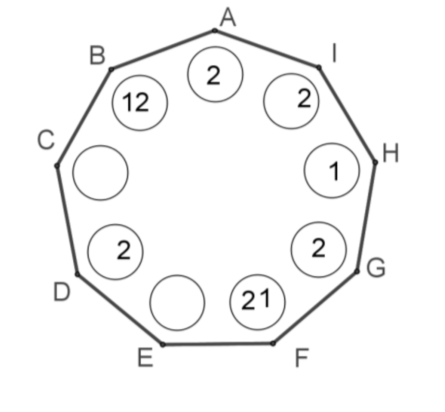
1.



Distribution initiale



Passage des « 2 euros » à gauche



Passage des « 1 euro » deux fois à droite

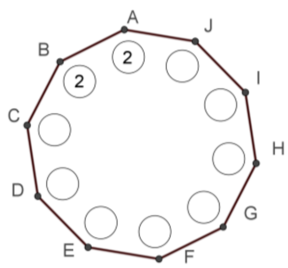
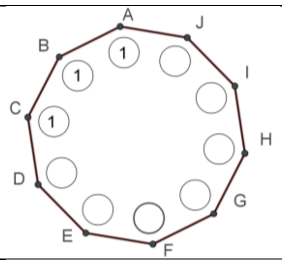
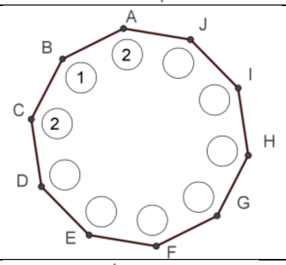
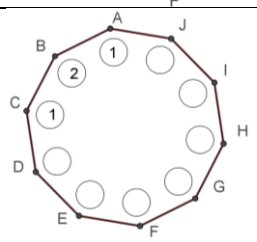
2. Supposons que A, B et C aient reçu chacun une pièce de 1 euro. Lors des échanges, la pièce détenue par A va à C, celle détenue par B va à D. Si D avait au départ une pièce de 2 euros, elle est passée à C, qui a donc deux pièces à l'issue des échanges. Donc, s'il n'y a pas de « trou », D avait au départ une pièce de 1 euro. De proche en proche, on en déduit que toutes les pièces distribuées étaient des pièces de 1 euro.
Supposons que A et B aient reçu une pièce de 1 euro, et que C et I ont reçu une pièce de 2 euros. Lors des échanges, C reçoit la pièce de 1 euro de A, D celle de B, B reçoit la pièce de 2 euros de C. Si D avait reçu une pièce de 2 euros, elle serait passée à C, qui aurait ainsi 2 pièces. Donc D a reçu une pièce de 1 euro, qu'il a donnée à F. Si E avait reçu une pièce de 2 euros, elle serait passée à D, qui en aurait deux. Donc E a reçu une pièce de 1 euro.
A doit avoir reçu une pièce de 1 euro, qui lui vient donc de H. H reçoit la pièce de 2 euros de I. Mais alors I doit recevoir une pièce de 1 euro, qui lui vient de G. Il ne reste que F à munir, d'une pièce de 2 euros, le 1 euro étant interdit par ce qui précède.

	I	H	G	F	E	D	C	B	A
Début	2	**1**	**1**	2	**1**	**1**	2	1	1
Échanges	**1**	2	1	1	2	1	1	2	**1**

Se peut-il qu'une personne ayant reçu une pièce de 1 euro soit entourée de voisins possédant chacun une pièce de 2 euros ? Le tableau suivant procède à une discussion analogue à celle qui précède :

	I	H	G	F	E	D	C	B	A
Début	2	**2**	**1**	2	2	**1**	**2**	2	1
Échanges	**1**	2	**2**	**1**	2	2	1	**2**	2

Les distributions qui ne conduisent pas à des « trous » sont faites de paires de pièces de 2 euros séparées par des pièces de 1 euro ou de paires de pièces de 1 euro séparés par des pièces de 2 euros.

3.		
a		Si J recevait aussi une pièce de deux euros, la pièce de 1 euro de I irait à A, qui aurait deux pièces. I ne peut en effet recevoir aussi une pièce de 2 euros, car alors de proche en proche il y aurait 10 pièces de 2 euros. Donc J reçoit une pièce de 1 euro. I reçoit une pièce de 2 euros (sa pièce de 1 euro irait à A, nanti déjà par la pièce de 2 euros de B). Cette pièce va à H, et remplace une pièce de 2 euros (une pièce de 1 euro en H ne pourrait aller qu'en J, déjà nanti). La pièce de 1 euro de G va en I. On se retrouve dans la situation de la question précédente, avec des suites de 2 pièces de 2 euros précédant une pièce de 1 euro. Seulement voilà, 10 n'est pas multiple de 3.
b		D ne peut recevoir une pièce de 2 euros, car alors après les échanges C aurait deux pièces. Il en va de même pour E, et ainsi de suite, tous reçoivent une pièce de 1 euro. Impossible, il n'y en a que 9.
c		J et B héritent des pièces de 2 euros de A et C. La pièce de 1 euro de B va en D. A ne peut que recevoir une pièce de 1 euro provenant de I. Si J avait eu une pièce de 1 euro, elle serait allée en B, qui aurait deux pièces. Donc J avait reçu une pièce de 2 euros, qui va en I. On retrouve la situation des groupes de 3, et 10 n'est pas multiple de 3.
d.		La distribution de peut pas conduire à des suites de trois pièces 1 – 1 – 1, 2 – 1 – 2, ni à la succession 2 – 2. Les cas restant se réduisent à 1 – 2 – 1. J doit recevoir une pièce de 1 euro, à donner à B et I une pièce de 2 euros. On se retrouve dans la situation des suites de trois pièces déjà rencontrées. En conclusion, avec 10 personnes et dans les conditions proposées, une personne au moins est démunie après les échanges (qui n'en sont donc pas).

7. (séries autres que S) Éloge de la régularité

Appelons m, p et d, respectivement, les distances à parcourir en montée, en terrain plat et en descente, comptées dans le sens A vers B. L'énoncé donne deux relations : $m + p + d = 15$ et $\frac{m}{4} + \frac{p}{5} + \frac{d}{6} = 3$, qui peuvent être traduites par $\begin{cases} m + p + d = 15 \\ 5m + 2p = 30 \end{cases}$ (*)

Le temps mis « à la régulière » pour effectuer le parcours de B vers A s'exprime par $T = \frac{m}{6} + \frac{p}{5} + \frac{d}{4}$

Soit encore $60T = 10m + 12p + 15d.$

Les trois relations conduisent à $5(d - m) = 60T - 180$, ou encore $T = 3 + \frac{1}{12}(d - m)$

Les relations (*) conduisent à l'expression de m et d en fonction de p : $\begin{cases} m = 6 - \frac{2p}{5} \\ d = 9 - \frac{3p}{5} \end{cases}$

Il s'ensuit que $d - m = 3 - \frac{p}{5}$ et donc que $T = 3 + \frac{1}{4} - \frac{p}{60}$

Sous cette dernière forme, on voit que :

1. Le temps « régulier » est supérieur à 3 heures (car $\frac{P}{60} < \frac{1}{4}$), donc Clara a forcé l'allure.

2. Le temps « régulier » est inférieur à 3 heures et quart, donc Isabelle a ralenti ou s'est arrêtée.