ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 2**

Parution lundi 21 novembre **Retour attendu pour le lundi 12 décembre**

Exercice 1 – Rencontres de paraboles

On retrouve le sommet $S\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$ de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a en partant de la forme canonique $y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Propriété 1 : Les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives respectives des fonctions f et g sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Propriété 2 : Soit a et b deux réels positifs, $a = b$ si et seulement si $a^2 = b^2$

Propriété 3 : si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2,alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

On considère le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Soit (P_1) et (P_2) les paraboles d'équations respectives $y = x^2 - 8x + 17$ et $y = -x^2 + 4x + 7$.

On appelle respectivement S_1 et S_2 les sommets des paraboles (P_1) et (P_2). On suppose que ces deux paraboles se coupent en deux points P et Q. Quelle est la nature du quadrilatère S_1PS_2Q ?

2. Soit maintenant (P_3) et (P_4) les paraboles d'équations respectives $y = -x^2 + bx + c$ et $y = x^2$.

On appelle respectivement S_3 et S_4 les sommets des paraboles (P_3) et (P_4).
Trouver les conditions nécessaires et suffisantes portant sur b et c pour que les deux paraboles se coupent en deux points R et T et les points S_3, S_4, R et T sont deux à deux distincts.

3. Dans le cas où $b = 0$ et $c = 2$, déterminer la nature du quadrilatère S_3RS_4T.

Exercice 2 – Polynômes symétriques

Propriété 1 : Deux polynômes P et Q sont égaux, c'est-à-dire, pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$ si et seulement si ces deux polynômes ont le même degré et leurs monômes de même degré ont les mêmes coefficients.

Propriété 2 : Un réel a est racine d'un polynôme P si et seulement si $P(x)$ est factorisable par $(x - a)$, c'est-à-dire s'il existe un polynôme Q tel que, pour tout réel x, $P(x) = (x - a)Q(x)$.

On dit qu'un polynôme de degré n est *symétrique* lorsque, pour tout entier $k \leq n$, les coefficients des monômes de degré k et $n - k$ sont égaux.
Exemple : $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 4x + 2$.
Soit a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$.

1. Pour tout réel x, on pose $P(x) = ax^2 + bx + a$. Montrer que 0 n'est pas solution de l'équation $P(x) = 0$. Dans le cas où cette équation $P(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2, exprimer x_2 en fonction de x_1.
2. Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$.
   a. Montrer que si u est une solution de $P(x) = 0$ alors $\frac{1}{u}$ est aussi une solution de $P(x) = 0$.
   b. Déterminer une solution « évidente » de $P(x) = 0$.
   c. Dans le cas où $a = 2$ et $b = -3$, résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 3 – Inégalités et racines carrées

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.
Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.
Propriété : Soit a et b deux réels positifs, $a \leq b$ si et seulement si $a^2 \leq b^2$.

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

1. Montrer que $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Montrer que $\frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
3. Comparer $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Exercice 4 – Médianes concourantes et droite d'Euler

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- caractérisation du milieu I d'un segment $[\mathrm{AB}]$ par l'une des égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$ ou, pour un point M du plan, $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$.

- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs
- parallélogramme par l'égalité de deux vecteurs
- relation de Chasles…

Théorème : les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé centre de gravité du triangle et il est situé au tiers de chaque médiane, en partant de la base.

1. Démonstration du théorème : soit ABC un triangle et soit $\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}$ les milieux respectifs des segments $[\mathrm{BC}], [\mathrm{CA}], [\mathrm{AB}]$. On note G le point d'intersection des médianes (BJ) et (CK) et D le symétrique de A par rapport à G.
   a. Montrer que le quadrilatère BDCG est un parallélogramme.
   b. En déduire que G est situé sur (AI) et préciser la position de G sur chaque médiane.
   c. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)$.
2. Soit respectivement O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et soit H le point du plan défini par $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$.
   a. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
   b. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
3. Montrer que les points O, H et G sont alignés.

Exercice 5 – Alignement et parallélisme en géométrie analytique

Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :

- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;
- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;
- traduisant sur ses coordonnées l'appartenance d'un point à une droite.

Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

Soit ABC un triangle rectangle en C. On pose $\mathrm{CB} = a$ et $\mathrm{CA} = b$. On note I le milieu de [BC] et J le milieu de [AI].
Soit K le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et soit L le symétrique du point I par rapport au point B.

1. Montrer que les points K, J et B sont alignés.
2. Montrer que les droites (AL) et (BK) sont parallèles.

On peut se placer pour cela dans un repère orthonormé $(\mathrm{C}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans lequel les coordonnées du point A sont $(b, 0)$ et celles du point B sont $(0, a)$.

Exercice 6 – Famille de droites

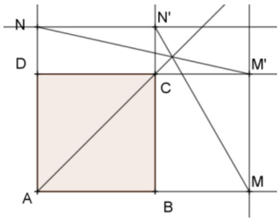
En géométrie analytique, il est indispensable de savoir :

- traduire sur une équation de droite les éléments caractéristiques d'une droite (vecteur directeur, coefficient directeur, appartenance d'un point …) ;
- trouver à partir d'une équation de droite ces mêmes éléments caractéristiques.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout réel m, on considère l'ensemble D_m des points $M(x, y)$ tels que : $(2 + m)x - (m - 1)y + 3m = 0$.

1. Vérifier que pour tout réel m, D_m est une droite.
2. Pour quelle valeur de m, la droite D_m est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? à l'axe des ordonnées ?
3. Montrer que toutes les droites D_m passe par un même point I dont on donnera les coordonnées.
4. Pour quelle valeur de m le nombre -1 est le coefficient directeur de la droite D_m ? A-t-on pour tout réel p une droite D_m de coefficient directeur p ?
5. Soit $A(1,3)$ et $B(-2, -3)$. Pour quelle valeur de m la droite D_m a-t-elle même ordonnée à l'origine que la droite (AB) ?

Exercice 7 – Droites concourantes



Deux droites du plan sont parallèles ou sécantes. Lorsque trois droites ont un point commun, on dit qu'elles sont *concourantes* (ce terme a été utilisé dans un exercice précédent).

On considère un carré ABCD de côté 1, et le repère (A ;$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$). Les points M et N ont pour couples de coordonnées $(a, 0)$ et $(0, b)$ respectivement avec a et b différents de 0 et de 1. Les points M' et N' sont les points de couples de coordonnées $(a, 1)$ et $(1, b)$ respectivement.

1. À quelle condition (sur a et b) les droites (MN') et (NM') sont-elles parallèles ?

2. Montrer que, si cette condition n'est pas réalisée, les droites (MN'), (NM') et (AC) sont concourantes.