Stage olympique pour collégiens

24 et 25 octobre 2011

Calcul et calcul littéral

Exercice 1

Déterminer tous les nombres entiers positifs de 7 chiffres au plus, divisibles par 6 et dont les chiffres sont des 0 ou des 1.

Éléments de solution Un nombre est divisible par 6 si, et seulement si, il est divisible par 2 et 3.

Les nombres cherchés sont pairs donc se terminent par 0. Ils ont donc 6 chiffres au plus qui sont des 1.

Puisqu'ils sont divisibles par 3, la somme de leurs chiffres est divisible par 3. Elle est donc égale à 0, 3 ou 6.

Les 22 nombres répondant à la question sont donc :

Trois qui comportent un seul 0 : 0, 1 110,111 111 0

Trois qui comportent deux 0 : 11 100, 11 010, 10 110

Six qui comportent trois 0 : 111 000, 110 100, 110 010, 101 100 : 101 010, 100 110

Dix qui comportent quatre 0 : 1 110 000, 1 101 000, 1 100 100, 1 100 010, 1 011 000, 1 010 100, 1 010 010, 1 001 100, 1 001 010, 1 000 110,

Exercice 2

Soit *a, b, c, d* quatre entiers tels que $0 \leq a < b < c < d$.
Sachant que la moyenne de ces quatre entiers est 8, quelle est la plus grande valeur possible de *d* ?

Éléments de solution $\dfrac{a+b+c+d}{4} = 8$ d'où $a+b+c+d = 32$. Ce qui équivaut à $d = 32-(a+b+c)$

d est le plus grand entier possible si, et seulement si $a+b+c$ est le plus petit entier possible.
Puisque $0 \leq a < b < c$, la plus petite valeur possible de $a+b+c$ est égale à 0 + 1 + 2.

Donc, la plus grande valeur possible de d est égale à 32 – 3 soit *d* = 29.

Exercice 3

Montrer que pour tous nombres *a* et *b* non nuls et de somme strictement positive on a : $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2} \geqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Préciser dans quel cas il y a égalité.

Éléments de solution Étudions le signe de $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{a^3+b^3}{a^2b^2}-\dfrac{a+b}{ab}$.

Or $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ donc $\dfrac{a^3+b^3}{a^2b^2}-\dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}-\dfrac{a+b}{ab}$

$$\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}-\frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{a^2b^2}\left(a^2-ab+b^2-ab\right)$$

D'où $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{a+b}{a^2b^2}(a-b)^2$. Comme $a+b>0$, $a^2b^2>0$ (*a* et *b* sont non nuls), on en déduit que $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2} \geqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Exercice 4

Étant donnés trois chiffres distincts *a*, *b* et *c*, il est possible en choisissant deux chiffres à la fois de former six nombres de deux chiffres. Déterminer *a*, *b*, *c* pour que la somme des six nombres soit égale à 484.

Éléments de solution Les six nombres que l'on peut écrire sont :
$10a+b$, $10a+c$, $10b+a$, $10b+c$, $10c+a$, $10c+b$.
La somme de ces six nombres est $S=20(a+b+c)+2(a+b+c)$ soit $S=22(a+b+c)$.

On en déduit que $a+b+c=\dfrac{484}{22}$ soit $a+b+c=22$.

En supposant que $a<b<c$, on obtient deux triplets (a,b,c) répondant à la question : (5, 8, 9) et (6, 7, 9),

Exercice 5

On écrit la liste des nombres entiers, de 1 à *n*, puis on en fait la moyenne. Si on retire un certain nombre *p* de la liste, la moyenne devient 40,75. Quel nombre a-t-on retiré ?

Éléments de solution On commence par redémontrer que la somme des entiers compris entre 1 et *n* est
$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

La moyenne de ces *n* nombres est donc $M_n=\dfrac{(n+1)}{2}$. Si on ôte l'entier *p* de la suite, la moyenne de la nouvelle suite est $N_{n,p}=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}-p}{n-1}$. La différence entre les deux moyennes est $M_n-N_{n,p}=\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}-p}{n-1}$, ou encore $M_n-N_{n,p}=\dfrac{p}{n-1}-\dfrac{n+1}{2(n-1)}$. Le premier terme de cette dernière différence est compris entre 0 et 1 (le cas $p=n$ peut être éliminé par un raisonnement direct) et le second est compris entre $\dfrac{1}{2}$ et 2 (les petites valeurs de *n* sont elles aussi éliminées par un raisonnement direct).
Conclusion : la nouvelle moyenne se situe à une distance de l'ancienne inférieure à 1. Et l'ancienne moyenne est un entier ou un demi-entier. Les candidats sont donc 41,5 ; 41 ; 40,5 et 40. On trouve finalement $p=61$ et $n=81$.

Exercice 6

(a) Calculer le produit $P=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)...\left(1+\dfrac{1}{2010}\right)\left(1+\dfrac{1}{2011}\right)$

(b) Calculer la somme : $S=-1+2-3+4-5+6-7+....-2009+2010-2011$.

Éléments de solution

(a) $P=\dfrac{\cancel{3}}{2}\times\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\times\dfrac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\times...\dfrac{\cancel{2011}}{\cancel{2010}}\times\dfrac{2012}{\cancel{2011}}$ soit $P=\dfrac{2012}{2}$, $P=1006$.

(b) $S=(-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+....+(-2009+2010)-2011$
$S=1005\times1-2011$ d'où $S=-1006$

Exercice 7 **La méthode de Karl Friedrich Gauss (1777-1855)**

Solution (a) $2T_{100}=(1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(100+1)$. $2T_{100}$ est la somme de 100 termes égaux à 101 d'où $T_{100}=\dfrac{100\times101}{2}$.

(b) $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$?

(c) $2+4+...+2n=2T_n=n(n+1)$
$1+3+...+(2n-1)=(1+2+3+...+(2n-1)+2n)-(2+4+...+2n$.

Donc la somme des *n* premiers nombres impairs est égale à $\dfrac{2n(2n+1)}{2}-n(n+1)=n^2$.

(d) Soit $S=100^2-99^2+98^2-97^2+...+6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2$
$S=(\underbrace{100-99}_{1})(100+99)+(\underbrace{98-97}_{1})(98+97)+...+(\underbrace{6-5}_{1})(6+5)+(\underbrace{4-3}_{1})(4+3)+(\underbrace{2-1}_{1})(2+1)$

$S=100+99+98+97+...+3+2+1$. $S=\dfrac{100\times101}{2}$ d'où $S=5050$.

Exercice 8

Éléments de solution Pour tout nombre non nul n : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ donc

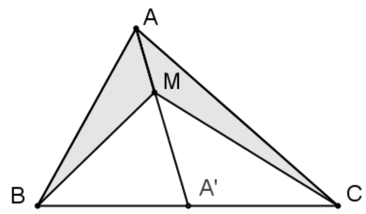
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{2009\times 2010}+\frac{1}{2010\times 2011}=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+...+\cancel{\frac{1}{2009}}-\cancel{\frac{1}{2010}}+\cancel{\frac{1}{2010}}-\frac{1}{2011}$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{2009\times 2010}+\frac{1}{2010\times 2011}=\frac{2010}{2011}.$$

Géométrie du triangle

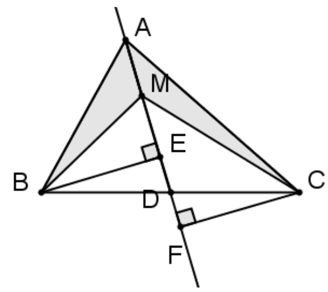
Exercice 1 Médianes d'un triangle

1. Soit ABC un triangle, A' le milieu du segment [BC] et M un point intérieur au triangle ABC.



Démontrons que si M est un point intérieur au triangle ABC, appartenant à la médiane (AA'), alors les triangles MBA et MCA ont la même aire.
Soit M' le pied de la hauteur issue de M dans le triangle BMA'. [MM'] est également le pied de la hauteur issue de M dans le triangle A'MC. On en déduit que les triangles BMA' et A'MC ont la même aire.
On démontre de même que les aires des triangles ABA' et AA'C sont égales. On en déduit que :
Aire (AMB) = aire (ABA') – aire (BMA')
= aire AA'C) – aire A'MC)
= aire (MCA).

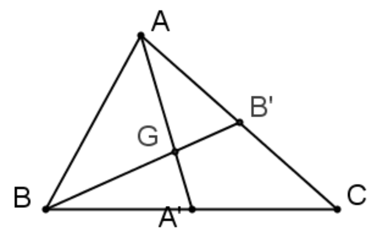
Réciproquement



Soit M un point intérieur au triangle ABC. **On suppose que** les triangles MBA et MCA ont même aire. Il s'agit de démontrer que M appartient à la médiane [AA'].
Soit D le point d'intersection des droites (MA) et (BC).
On veut démontrer que D et A' sont confondus.
Appelons E et F les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C dans les triangles MBA et MCA.

Puisque les aires des triangles MBA et MCA sont égales, on a :
MA × BE = MA × CF d'où BE = CF. D'où :2 × aire(MBD) = BE × MD. Or BE = CF, donc:
2 × aire (MBD) = CF × MD = 2 × aire (MDC).
En conséquence : aire(MBD) = aire (MDC).
Or, la hauteur issue de M du triangle MBD est aussi la hauteur issue de M du triangle MCD. Soit h sa mesure.
On a :2 ×aire (MBD) = h × BD et 2 × aire (MCD) = h × DC. D'où : BD = CD.

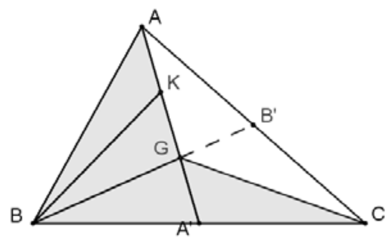
2. Soit A' et B' les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC] d'un triangle ABC et G le point d'intersection des droites (BB') et (AA'). **Il s'agit de démontrer que G appartient à la médiane issue de C du triangle ABC.**
Comme (AG) est la médiane issue de A dans le triangle ABC, on a :
Aire (GAC) = aire (GAB).
Comme (BG) est la médiane issue de B, on a : aire (GAB) = aire (GCB).



On en déduit que aire (GAC) = aire (GCB). G est donc un point de la médiane issue de C dans le triangle ABC.

Conclusion Les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en G.

3. Soit A' et B' les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC] d'un triangle ABC et G le centre de gravité de ce triangle.
On appelle K le milieu du segment [AG].
Puisque (BG) est la médiane issue de B dans le triangle ABC, on a :
Aire (ABG) = aire (BGC).Puisque K et A' sont les milieux respectifs de [AG] et [BC], on a :
Aire (ABG) = 2 × aire (GBK) et aire (BGC)= 2 × aire (GBA').



Donc GBK et GBA' ont la même aire. Par conséquent, G est le milieu du segment [AK].
En conséquence : AK = KG = GK. G est donc situé aux deux tiers de la médiane [AA'] en partant du sommet.

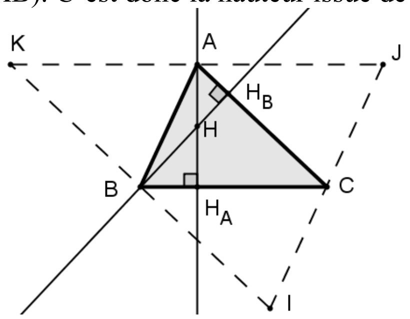
Exercice 2 Hauteurs d'un triangle

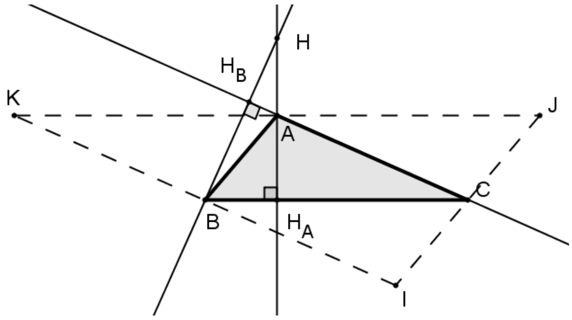
Soit H_A et H_B les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B dans le triangle ABC.
On mène par A, B et C les parallèles à (BC), (AC) et (AB) (respectivement. Ces droites déterminent un triangle IJK.
Les quadrilatères BCAK et BCJA sont des parallélogrammes (côtés deux à deux parallèles). On en déduit que :
BC = KA et BC = AJ donc KA = AJ. Et comme A est un point de (KJ), on en déduit que A est le milieu de [KJ]. D façon analogue, on établit que B est le milieu de [KI] et C celui de [IJ].

La droite (AH_A) passe par le milieu du segment [KJ]. Elle est, de plus, perpendiculaire à (KJ) (en effet : (AH_A) est perpendiculaire à (BC) et (BC) est parallèle à (KJ)).
(AH_A) est donc la médiatrice du segment KJ]. On démontre de même que (BHB) est la médiatrice du segment (KI).

Le point d'intersection H de ces deux médiatrices est donc le centre du cercle circonscrit au triangle IJK. La médiatrice relative au côté [IJ] passe par H (puisque les trois médiatrices du triangle IJK sont concourantes) et par C, milieu de [IJ].

La droite (CH) est donc perpendiculaire à (IJ) et, comme (IJ) et (AB) sont parallèles, la droite (CH) est perpendiculaire à (AB). C'est donc la hauteur issue de C du triangle ABC.





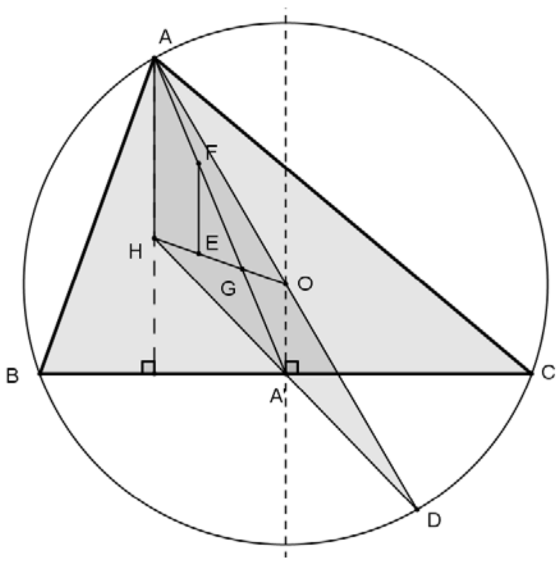
Conclusion : Les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes au point H.

Exercice 3 Droite d'Euler

Soit ABC un triangle non équilatéral, O, G, H respectivement son centre du cercle circonscrit, centre de gravité et orthocentre.
On appelle A' le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A dans la symétrie de centre O.

1. (AA') est la médiane issue de A dans le triangle ABC et, comme G est le centre de gravité de ce triangle, G est situé aux deux tiers de cette médiane.

Démontrons que (AA') est la médiane issue de A dans le triangle AHD. Les droites (OA') et (AH) sont toutes deux perpendiculaires à (BC) (la première est la médiatrice du segment [BC] et la seconde la hauteur issue de A).
On en déduit que les droites (AH) et (OA') sont parallèles. Considérons alors le triangle AHD. Dans ce triangle, la droite (OA') est parallèle au côté (AH) et passe par le milieu de [AD°. Elle coupe donc le côté [DH] en son milieu.



On en déduit que **A' est le milieu du segment [DH]** et que (AA') est la médiane issue de A dans le triangle AHD.
G, situé aux deux tiers de [AA'] est donc le centre de gravité du triangle AHD.
D'autre part : (HO) est la médiane issue de H dans le triangle AHD (puisque A et D sont symétriques par rapport à O, O est le milieu du segment [AD]). G appartient donc à (HO).
En conclusion : Les points O, G et H sont alignés.
2. Soit F le milieu du segment [AO]. La parallèle à (AH) passant par F coupe [HO] en son milieu. E est donc le milieu de [HO]
De plus, AH = 2 FE. ON a vu que la droite (OA') joignait les milieux de deux côtés du triangle AHD. Donc AH = 2 OA'.
En conclusion : AH = 2OA' = 2EF. En particulier OA' = FE.
b) Le quadrilatère A'EFO est non croisé et les côtés [FE] et [OA'] sont parallèles et de même longueur. C'est donc un parallélogramme. Les diagonales d'un parallélogramme ayant même milieu, on a : EG = GO.

Les points H, E, G, O, alignés dans cet ordre sont tels que HE = EG = GO. Donc OH = 3 OG.

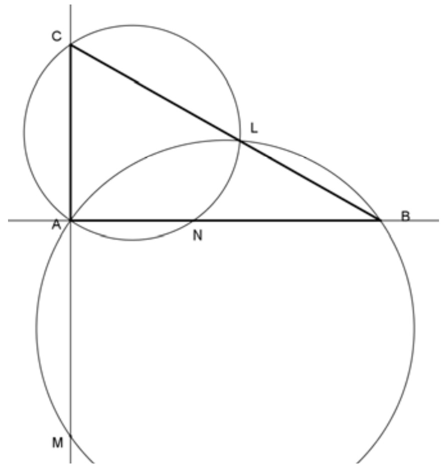
Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit L un point de son hypoténuse. Le cercle circonscrit au triangle ABL recoupe la droite (AC) en M, et le cercle circonscrit au triangle ACL recoupe la droite (AB) en N. Montrer que les points L, M et N sont alignés.

Solution

L'angle $\widehat{CAN}$ est droit. Il s'ensuit que [CN] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ACL. D'où on déduit que l'angle $\widehat{CLN}$ est lui aussi droit. En se plaçant dans le cercle circonscrit au triangle ABM, on obtient un résultat analogue : l'angle $\widehat{BLM}$ est droit. Les droites (LM) et (LN), perpendiculaires en un même point L à la droite (BC), sont une seule droite, et les points L, N et M sont alignés.

Les quatre points B, C, M et N sont chacun l'orthocentre du triangle formé par les trois autres : (B,C,M,N) est un *quadrangle orthocentrique.*



Équations

Exercice 1

Sachant que x est un nombre positif tel que $x[x] = 17$, quelle est la valeur de x ?

Solution $[x] \leq x$ donc en multipliant les deux membres par $[x]$ qui est positif : $[x]^2 \leq x[x]$.
On en déduit que $[x]^2 \leq 17$ d'où $[x] \leq 4$.
Si $[x] \leq 3$, on a $x < 4$ et $x[x] < 12$. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.
Si$[x] = 4$, $4x = 17$ d'où $x = 4{,}25$.
Vérification (Réciproque) : si $x = 4{,}25$ alors $[x] = 4$ et $x[x] = 17$.

Exercice 2

Les masses, en kilogrammes, de cinq citrouilles sont des entiers naturels tous différents. On place ces citrouilles deux par deux sur une balance. Les plus petites masses ainsi obtenues sont 16kg et 18kg, tandis que les plus grandes sont 26kg et 27kg.

(a) Ces informations permettent-elles de déterminer la masse de chacune des citrouilles ?
(b) Si non, combien de cas en tout sont cohérents avec ces informations ? Donner les cinq masses dans chacun des cas.

Éléments de solution Notons ces cinq masses a,b,c,d,e avec $a<b<c<d<e.$ Les deux plus petites sommes de deux de ces nombres sont $a+b$ et $a+c$ et les deux plus grandes $c+e$ et $d+e$. Donc $a+b=16$, $a+c=18$, $c+e=26$ et $d+e=27$
Si $a \leq 5$, alors $c \geq 13$ (car $a+c=18$). Or si $c \geq 13$, alors $e \leq 13$ Impossible car on aurait alors $e \leq c$.
Si $a=6$, alors $b=10, c=12, d=13, e=14$.
Si $a=7$, alors $b=9, c=11, d=12, e=15$
Si $a \geq 8$, alors $b \leq 8$ ($a+b=16$). Impossible car on aurait alors $b \leq a$.
Ces informations sont donc insuffisantes puisqu'il existe deux solutions (6;10;12;13;14) et (7;9;11;12;15).

Exercice 3

On appelle *alphamétique* une équation où les chiffres sont remplacés par des lettres. Un même chiffre ne peut être représenté par deux lettres différentes et une lettre représente un seul chiffre. De plus, un nombre ne doit jamais « commencer » par zéro. Résoudre l'équation consiste à trouver quelle lettre associer à chaque chiffre pour que l'équation soit vérifiée.
Résoudre l'*alphamétique* AMQMA × 6 = LUCIE.

Éléments de solution Soit a, m, q, l, u, c, i, et e les chiffres remplacés respectivement par A, M, Q, L, U, C, I et E. $a=1$, car sinon le produit aurait 6 chiffres. On a donc $e=6$ et $l \geq 7$.

Ensuite, on teste les valeurs de m. On ne peut avoir un entier pair car si $m = 2k$, on aurait $6m = 12k = 2k + 10k$, ce qui conduirait à $i = 2k = m$, ce qui est impossible.
De plus, $m \leqslant 5$ car si $m \geqslant 7$, alors le produit contiendrait 6 chiffres.
Il ne reste que $m = 3$ ou $m = 5$. Si $m = 3$, on a immédiatement $i = 8$. On peut alors essayer les chiffres restants comme valeur de q. Toutes conduisent à des duplications.
Il ne reste plus que $m = 5$, donnant $i = 0$. Ici encore, on essaie les différentes valeurs possibles de q pour trouver la seule solution $q = 4$, $c = 7$, $u = 2$ et $l = 9$, soit 15 451 × 6 = 92 706.

Exercice 5

Trois amis ont acheté ensemble le ballon officiel de la coupe du monde de football pour 135 €, qu'ils ont payé à eux trois. Le premier a déboursé une somme inférieure ou égale à celle payée par ses deux amis ensemble. Le deuxième a déboursé une somme inférieure ou égale à la moitié de celle payée par ses deux amis ensemble. Quant au troisième, il a déboursé une somme inférieure ou égale au cinquième de celle payée par ses deux amis ensemble.
Combien chacun a-t'il payé ?

Solution Notons a, b et c les sommes déboursées par chacun des trois amis.
L'énoncé fournit les données suivantes :

$$a + b + c = 135, a \le b + c, b \le \frac{a+c}{2}, c \le \frac{a+b}{5}.$$

Remplaçons $b + c, a + c, a + b$ respectivement par $135 - a, 135 - b$ *et* $135 - c$ dans les 3 inégalités précédentes.
On obtient : $a \le 135 - a, 2b \le 135 - b, 5c \le 135 - c$. D'où :
$a \le 67{,}7; b \le 45; c \le 22{,}5$. Supposons que l'une des trois inégalités précédentes soit stricte. Alors la somme $a + b + c$ serait strictement inférieure à 67,5 + 45 + 22,5 (135), ce qui est contraire à l'hypothèse.
Conclusion : a = 67,5 ; b = 45 et c = 22,5.
Un des amis a déboursé 67,50 €, le deuxième 45 € et le troisième 22,50 €.

Exercice 6

Un nombre glissant est un nombre qui peut se décomposer en la somme de deux entiers naturels non nuls, pas nécessairement distincts, tels que la somme de leurs inverses s'écrive avec les chiffres du nombre de départ, dans le même ordre et précédés de 0 et d'une virgule. Quels sont les nombres glissants à 2 chiffres ?

Éléments de solution Soit N un nombre glissant à deux chiffres. Il existe donc deux entiers naturels non nuls

$$m \text{ et } n \text{ tels que } \begin{cases} N = m + n \\ \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{m+n}{100} \end{cases}$$

Si $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{100}$ alors $\frac{m+n}{mn} = \frac{m+n}{100}$ d'où $mn = 100 \quad (\text{car } m + n \neq 0)$.
Les paires $\{m, n\}$ possibles sont {1, 100}, {2, 50}, {4, 25},{5, 20},{10, 10}.
Si m = 1 et n = 100, alors N = 101. Ce cas est à exclure car 101 a 3 chiffres.
Si m = 2 et n = 50, alors N = 52 et $\frac{1}{2} + \frac{1}{50} = 0{,}52$.
Si m = 4 et n = 25, alors N = 29 et $\frac{1}{4} + \frac{1}{25} = 0{,}29$.
Si m = 5 et n = 20, alors N = 25 et $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 0{,}25$.
Le cas m = n = 10 a été examiné en exemple.
En conclusion : Il y a 4 nombres glissants de deux chiffres qui sont : 20, 25, 29 et 52.

Exercice7

Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2011}$ (1)

Éléments de solution Pour tous nombres x et y non nuls, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$.

L'équation (1) équivaut donc à $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2011}$ ou encore $xy - 2011x - 2011y = 0$.

Or $xy-2011x-2011y=(x-2011)(y-2011)-2011^2$.

L'équation (1) équivaut donc à : $(x-2011)(y-2011)=2011^2$ (2).

(a) Recherchons tout d'abord les couples (x,y) d'entiers positifs solutions de l'équation (1).

On remarque que x et y sont alors strictement plus grands que 2011 : en effet $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ sont deux nombres strictement positifs dont la somme est égale à $\frac{1}{2011}$. On en déduit que $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{2011}$ et $0<\frac{1}{y}<\frac{1}{2011}$ d'où $x>2011$ et $y>2011$

$(x-2011)$ et $(y-2011)$ sont donc deux entiers positifs dont le produit est 2011^2 (équation (2)).

Comme 2011 n'a que deux diviseurs qui sont 1 et 2011 (c'est un nombre premier), les diviseurs de 2011^2sont : 1, 2011 et 2011^2.

Les entiers x et y sont donc les solutions de l'un des systèmes suivants :

$\begin{cases} x-2011=1 \\ y-2011=2011^2 \end{cases}$, $\begin{cases} x-2011=2011 \\ y-2011=2011 \end{cases}$, $\begin{cases} x-2011=2011^2 \\ y-2011=1 \end{cases}$.

Remarque : $2011+2011^2=2011(1+2011)=2011\times 2012$.

IL y a donc trois couples (x,y) d'entiers naturels solutions de (1) : $(1,2011\times 2012),(4022,4022),(2011\times 2012,1)$.

(b) Recherchons maintenant les couples d'entiers relatifs solutions de (1)

Les entiers $(x-2011)$ et $(y-2011)$ ont toujours pour produit est 2011^2 mais il y a cette fois cinq possibilités.

Les trois citées dans le cas (a) ainsi que les solutions des systèmes $\begin{cases} x-2011=-1 \\ y-2011=-2011^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x-2011=-2011^2 \\ y-2011=-1 \end{cases}$ (on a éliminé le cas $\begin{cases} x-2011=-2011 \\ y-2011=-2011 \end{cases}$ qui équivaut à $x=y=0$, ce qui est impossible.

L'ensemble des solutions est donc :

$\{(2010,-2010\times 2011),(-2010\times 2011,2010),(1,2011\times 2012),(4022,4022),(2011\times 2012,1)\}$

Exercice8

Sachant que le système d'équations $x=\sqrt{11-2yz}$, $y=\sqrt{12-2zx}$ et $z=\sqrt{13-2xy}$ admet des solutions réelles, calculer la somme $x+y+z$.

Solution

Puisque $\sqrt{11-2yz}$ est un nombre positif, x est positif. Il en est de même pour y et z.

En élevant les deux membres de chacune des trois équations au carré, on obtient :

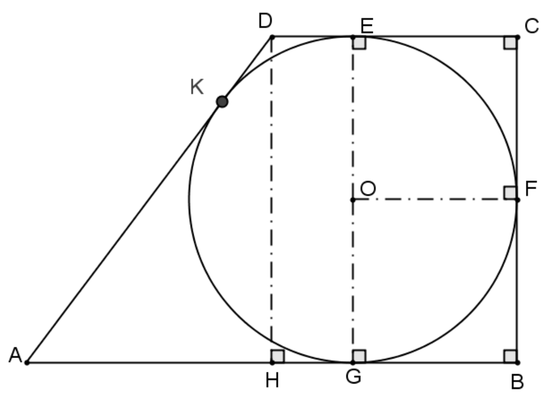
$x^2=11-2yz$, $y^2=12-2zx$ et $z^2=13-2xy$ d'où $x^2+y^2+z^2=11-2yz+12-2zx+13-2xy$

Soit $\underbrace{x^2+y^2+z^2+2xy+2zx+2yz}_{(x+y+y)^2}=\underbrace{11+12+13}_{36}$

On en déduit que $x+y+z=6$ (car $x+y+z$ est positif).

Géométrie et calcul

Exercice 1



Éléments de solution Le cercle de centre O et de rayon 2 est tangent aux côtés [DC], [CB], [BA] et [AD] du trapèze BCD. Notons E , F, G, K les points de contacts du cercle avec les côtés du trapèze.

Soit H le point d'intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par D. Notons E, F, G et H les points de

On sait que DC = 3. Donc HB = 3 (car DCBH est un rectangle).

ECFO et OFBG sont des carrés de côté 2(ils ont chacun trois angles droits et deux côtés consécutifs de longueur 2).

Donc EC = GB = 2. On en déduit que :

DE = HG = 1 et DH = DE = 4.

D'autre part (DE) et (DK) sont tangentes au cercle en E et K car (DE)et (DK) sont respectivement perpendiculaires à (OE) et (OK) en E et K.

On a donc DK = DE = 1. De même (AG) et (AK) sont tangentes au cercle en G et K.

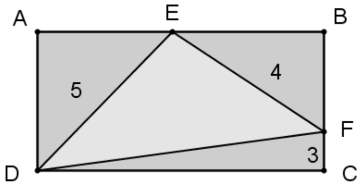
Posons x =AG. Alors AK = AJ = x.

Selon le théorème de Pythagore, dans le triangle AHG rectangle en H : $AD^2 = AH^2 + HD^2$ d'où $(x + 1)^2 = (x + 1)^2 + 4^2$.

Soit : $x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16$, d'où $4x = 16$, $x = 4$. D'où AG = 6.

L'aire du trapèze est donc égale à 18 $\left(\frac{6+3}{2}\times 4\right)$.

Exercice 2



On considère un rectangle ABCD. Soit E et F deux points appartenant respectivement aux segments [AB] et [BC].
Calculer l'aire du triangle EDF sachant que les aires des triangles DCF, FBE et EAD sont respectivement égales à 3, 4 et 5.

Éléments de solution Posons x = AD et y = DC.

La somme des aires des trois triangles DCF, FBE et EAD est égale à 12.

L'aire du triangle DEF est donc égale à $xy-12$.

Calculons $X = xy-12$ qui est un nombre positif.

Puisque l'aire de DCF est égale à 3, on a : $\frac{y\times FC}{2}=3$ d'où $FC=\frac{6}{y}$.

De même, puisque l'aire de EAD est égale à 5, on a : $\frac{x\times AE}{2}=5$ d'où $AE=\frac{10}{x}$.

On en déduit que $BF=\frac{xy-6}{y}$ (car BF = BC – FC soit BF = $BF = x-\frac{6}{y}$)

et $\text{BE}=\frac{xy-10}{x}$ (car BE = BA – AE soit $\text{BE}=y-\frac{10}{x}$).

Comme l'aire du triangle EBF est égale à 4, on en déduit que : $4=\frac{\text{BE}\times\text{BF}}{2}$ d'où la relation :

$\frac{1}{2}\frac{xy-6}{y}\times\frac{xy-10}{x}=4$. Donc $(xy-6)(xy-10)=8xy$ (on multiplie les deux membres par $2xy$ qui n'est pas nul).

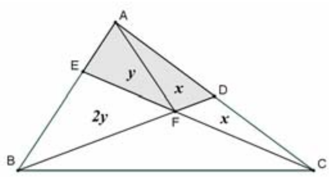
Exprimons cette relation en fonction de $X = xy-12$: $xy-6=(xy-12)+6$ donc $xy-6=X+6$.

$xy-10=(xy-12)+2$ donc $xy-10=X+2$, $xy=(xy-12)+12$ donc $xy=X+12$.

X vérifie donc la relation $(X+6)(X+2)=8(X+12)$ soit, en développant les deux membres :

$X^2+8X+12=8X+96$. Donc $X^2=84$. L'aire du triangle EDF est donc égale à égale à $\sqrt{84}$ (ou $2\sqrt{21}$).

Exercice 3



On considère un triangle ABC. On appelle D le milieu du segment (AC] et E le point du segment [AB] tel que $\text{AE}=\frac{\text{AB}}{3}$.
Sachant que le triangle ABC a une aire de 240 cm², calculer l'aire du quadrilatère AEFD.

Éléments de solution Soit $\mathcal{A}$ l'aire du quadrilatère AEFD.

Appelons x et y les aires respectives des triangles AFD et AFE.

L'aire d'un triangle MNP sera notée A_{MNP}.

Comme D est le milieu du segment [AC] du triangle ABC, on a : $A_{FDC} = x$ et $A_{ABD} = \frac{1}{2}\mathcal{A} = 120$

Comme BE = 2 EA, on a : $A_{EFB} = 2y$ et comme $\text{AE}=\frac{1}{3}\text{AB}$, $A_{EAC} = \frac{1}{3}\mathcal{A} = 80$

x et y vérifient donc le système :

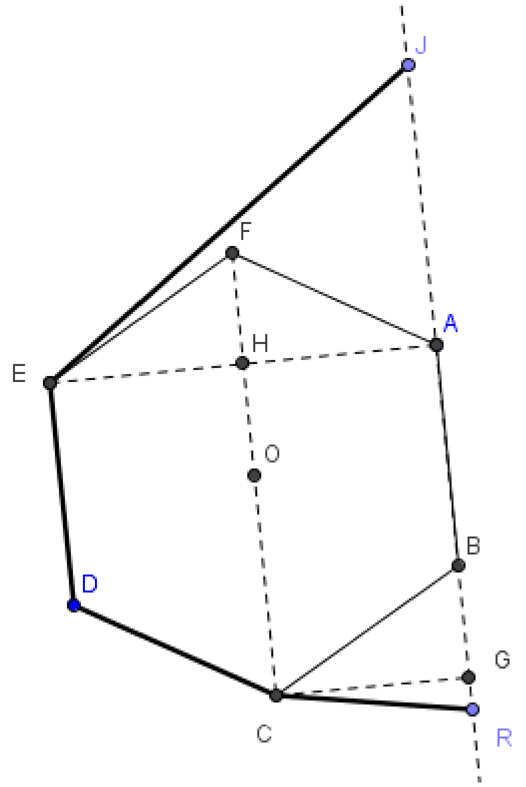
$\begin{cases} x+3y=120 \\ 2x+y=80 \end{cases}$ En remplaçant y par $80 - 2x$ dans l'équation $x+3y=120$, on obtient $x+3(80-2x)=120$

d'où $x = 24$, $y = 32$ et $\mathcal{A} = 56$.

Exercice 4

Juliette veut rejoindre Roméo au plus vite mais il lui est impossible de traverser le bassin en forme de double hexagone régulier. Quelle distance minimale doit-elle parcourir pour rejoindre Roméo ?

Éléments de solution Le chemin le plus court est le chemin JEDCR.



- On sait déjà que DE = DC = 15.
- Dans le triangle AHF rectangle en F, on a

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AF}} = \sin\widehat{\mathrm{AFH}} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et AF} = 15$$

(*on peut utiliser un cosinus et le théorème de Pythagore pour rester avec les connaissances des élèves en début de troisième*)

On en déduit $\mathrm{AH} = 15\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{AE} = 15\sqrt{3}$.

Dans le triangle EAJ, rectangle en A, le théorème de Pythagore permet alors de calculer JE :

$$\mathrm{JE}^2 = \mathrm{JA}^2 + \mathrm{AE}^2 = 20^2 + \left(15\sqrt{3}\right)^2 = 1075$$

D'où $\mathrm{JE} = 5\sqrt{43}$.

- Soit G le pied de la hauteur issue de C dans le triangle CRB.

$\mathrm{CG} = \mathrm{AH} = 15\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle CGB, rectangle en G permet de calculer BG :

$$\mathrm{BG}^2 = \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CG}^2 = 15^2 - \left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{15^2}{4}$$

d'où $\mathrm{BG} = \frac{15}{2}$ et $\mathrm{RG} = \mathrm{BR} - \mathrm{BG} = 10 - \frac{15}{2} = \frac{5}{2}$.

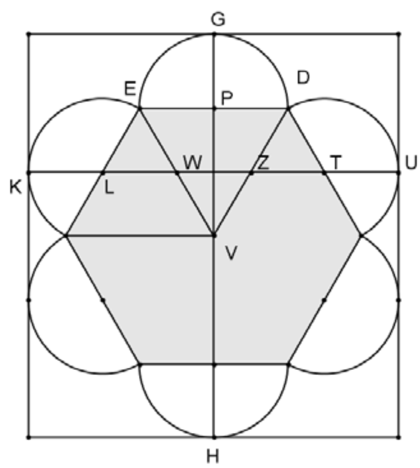
Enfin le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle CGR, rectangle en G permet de calculer CR :

$$\mathrm{CR}^2 = \mathrm{RG}^2 + \mathrm{GC}^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{700}{4} \text{ d'où } \mathrm{CR} = 5\sqrt{7}$$

Conclusion : Juliette doit parcourir la distance $5\sqrt{43} + 5\sqrt{7} + 30$.

Exercice 5

Éléments de solution



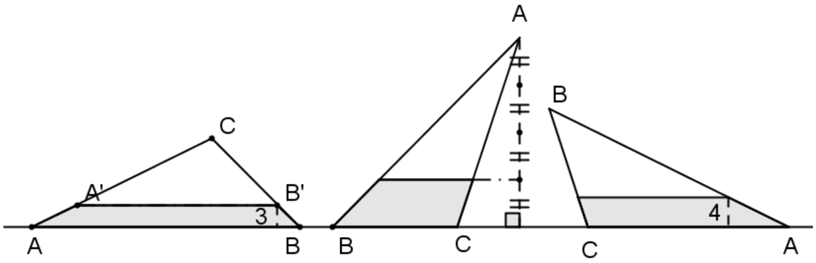
Les dimensions de la planche sont GH et KU.
GH = 2(GP + PV).
2GP = ED = 10,

PV est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 10 : $\mathrm{PV} = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

Donc GH = 10 + $10 + 5\sqrt{3}$
KU = KL + LW + WZ + ZT + TU
KU = TU = 5 (rayon des demi- cercles).
LW = WZ = ZT = 5 ([LW], [WZ] et [ZT] joignent les milieux des côtés de triangles équilatéraux de côté 10. Donc KU = 25.
Les dimensions du plateau sont donc : $\left(10 + 5\sqrt{3}\right)$cm et 25 cm.

Exercice 6

On considère un objet triangulaire ABC en plastique translucide d'une épaisseur constante et contenant un liquide coloré. On suppose que AB = 36. Lorsque l'objet est placé sur la base [AB] à l'horizontale, le liquide atteint la hauteur 3. Lorsque l'objet est placé sur la base [BC] à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur égale au quart de la hauteur issue du sommet A. Lorsque l'objet est placé sur la base [AC] à l'horizontale, le liquide atteint la hauteur 4. Que vaut AC ?



Éléments de solution L'épaisseur de l'objet étant uniforme, on peut ne considérer que la surface d'une face de l'objet. Sachant que lorsqu'on place la base [BC] de cet objet à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur égale au 1/4 de la hauteur issue du sommet A, alors la hauteur du triangle rempli d'air est 3/4 de la hauteur du grand triangle (l'objet triangulaire). Si le triangle est placé sur une autre base, le rapport des surfaces des triangles semblables, soit le triangle d'air et le grand triangle est constant, car les surfaces ne changent jamais. Donc le rapport des segments est aussi constant (étant la racine carrée des rapports des surfaces).
Bref, lorsque la base [AB] de cet objet est à l'horizontale, la hauteur du triangle d'air est 3/4 de la hauteur issue du sommet C du grand triangle. Le rapport est le même pour les bases des triangles.
Calculons l'aire A du liquide (aire d'un trapèze).

$$A = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{A'B'}}{2} \times 3 = \frac{36 + 27}{2} \times 3 = \frac{189}{2}$$

On trouve la mesure du troisième côté à partir de l'aire du liquide.

$$\frac{189}{2} = \frac{\mathrm{CA} + C'\mathrm{A'}}{2} \times 4 = 2\left(\mathrm{CA} + \frac{3}{4}\mathrm{CA}\right)$$. On en tire $\mathrm{CA} = 27$.

Raisonnement

Le principe des tiroirs

Exercice 1

Montrer que parmi 11 entiers naturels quelconques on peut en trouver deux, a et b, tels que $a - b$ soit divisible par 10.

Éléments de solution Considérons le chiffre des unités de 11 nombres entiers naturels quelconques. Il y en a 10 au plus qui sont distincts deux à deux. Il y a donc au moins deux entiers naturels a et b qui ont le même chiffre des unités. Dans ce cas, $a - b$ se termine par 0 et ce nombre est donc divisible par 10.

Exercice 2

Combien de personnes faut-il réunir pour être sûr que 2 d'entre elles (respectivement 3, 4, …, n) sont nées le même jour (mais pas nécessairement la même année) ?

Éléments de solution Une année compte 366 jours si elle est bissextile. Si on réunit 367 personnes, on est donc sûr que deux d'entre elles sont nées le même jour.

Pour être sûr que n personnes sont nées le même jour, il faut en réunir $366(n - 1) + 1$.

Exercice 3

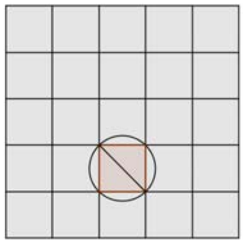
Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou 1.

Solution Considérons les $n+1$ nombres 0, 1, 11, 111, …, $\underbrace{1...1}_{n \text{ chiffres } 1}$ et effectuons la division euclidienne de chacun de ces nombres par n. Il y a au plus n restes possibles qui sont 0, 1, 2,…, $n-1$. Il y a donc au moins deux de ces ($n+1$) nombres a et b (on supposera $a > b$) qui ont le même reste r dans la division par n.
Notons q et q' les quotients respectifs de la division de a et b par n. On a : a $a = nq + r$ et $b = nq' + r$.
D'où $a - b = n(q - q')$. $a - b$ est un multiple de n. Il a au plus n chiffres (car a et b ont au plus n chiffres) et ces chiffres sont tous égaux à 0 ou 1 (car a et b ne sont composés que de 1 ou alors $b = 0$ et a n'est composé que de 1).

Exercice 4

On place 51 points au hasard sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

Solution Divisons le carré de côté 1 en 25 petits carrés de côté $\frac{1}{5}$.



D'après le principe des tiroirs, il y aura au moins trois points dans un même petit carré.

(les 25 premiers peuvent être dans 25 cases différentes, les 25 suivants également et le $51^{\text{ème}}$ sera dans un petit carré contenant déjà deux de ces points).

Ce carré de côté $\frac{1}{5}$ est inscrit dans un cercle qui a pour diamètre la diagonale de mesure $\frac{\sqrt{2}}{5}$. Il a donc pour rayon $\frac{\sqrt{2}}{10}$. Comparons $\frac{\sqrt{2}}{10}$ et $\frac{1}{7}$. Ce sont deux nombres positifs, ils sont donc rangés dans le même ordre que leurs carrés.

$\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 = \frac{2}{100}$ et $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$. Or $\frac{2}{100} = \frac{98}{4900}$ et $\frac{1}{49} = \frac{100}{4900}$. $\frac{98}{4900} < \frac{100}{4900}$ donc $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$.

On peut donc trouver au moins 3 points à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$.

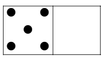
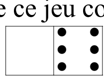
Raisonnements utilisant la parité ou le coloriage

Exercice 5

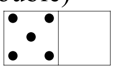
Un barman a devant lui 10 verres dont 5 sont à l'envers. Pourra-t-il, en retournant toujours simultanément une paire de verres et en répétant à volonté cette opération, obtenir finale ment les dix verres avec le bord en haut ? Ou au contraire, avec le bord en bas ?

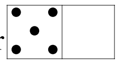
Éléments de solution Si le barman retourne deux verres quelconques, la parité du nombre de verres debout ne change pas, en effet si l'un des verres est debout et l'autre à l'envers, il y a après l'opération le même nombre de verres debout ; si les deux sont debout ou si les deux sont à l'envers, le nombre de verres debout augmente ou diminue de 2, donc la parité de ce nombre ne change pas. Comme, au départ, le nombre de verres debout est impair (5), il le restera : il est donc impossible d'obtenir par ce procédé 10 ou 0 verres debout.

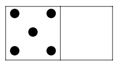
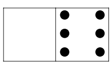
Exercice 6

On considère un jeu de dominos . Peut-on à l'aide de ce jeu construire une chaîne comprenant tous les dominos du jeu commençant par un  et se terminant par un  ?

Éléments de solution Parmi les 28 dominos du jeu, chaque numéro (0, l, 2, 3, 4, 5 ou 6) apparaît sur 8 fois (6 fois sur l'une des deux parties 2 fois sur le double)

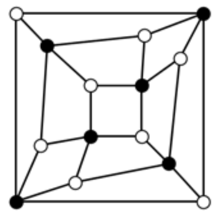
Montrons qu'une chaîne qui commence par un .

A l'intérieur d'une chaîne commençant par , le numéro 5 apparaît un nombre pair de fois (dominos juxtaposés). Puisque le numéro 5 apparaît sur 8 fois, s'il apparaît à une extrémité, il devra donc apparaître à l'autre.

Il est donc impossible de former une chaîne comprenant tous les dominos et qui ait pour extrémités  et .

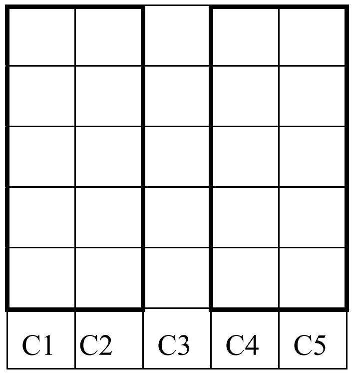
Exercice 7

La figure ci-contre schématise un réseau routier reliant 14 villes.
Existe-t-il un chemin passant exactement une fois par ces 14 villes ?
Colorions les villes en noir et blanc de telle sorte que deux villes voisines aient des couleurs différentes. En choisissant une des deux couleurs pour la première ville colorier, il n'y a ensuite qu'un coloriage possible pour les 13 autres. On a ou bien 6 villes blanches et 8 villes noires, ou bien 6 villes noires et 8 villes blanches.
Or, un chemin qui passe exactement une fois par ces 14 villes alterne les couleurs B-N-B-N-B-N-B-N-B-N-B-N-B-N ou N-B-N-B-N-B-N-B-N-B-N-B-N B soit, dans les deux cas, 7 villes blanches et 7 villes noires.
Il n'existe donc pas de tel chemin.

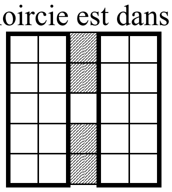


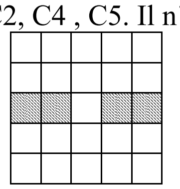
Exercice 8

Considérons un échiquier 5 × 5. On colorie une case en noire, toutes les autres restant blanches. A chaque étape, on peut changer la couleur de toutes les cases d'un « sous-carré » a × a (a entier compris entre 2 et 5), le but étant d'obtenir 25 cases blanches.
Où peut-on placer la case noire initiale pour parvenir à une solution ?



Notons les colonnes C1, C2, C3, C4 et. C5.
On vérifie que tout sous-carré contient un nombre pair de cases contenues dans. C1, C2, C4 , C5.
Donc, quels que soient les sous-carrés choisis, si la première case noircie est l'une des cases des colonnes C1, C2, C4 et C5, il y aura toujours, à chaque étape un nombre impair de cases noires dans les colonnes C1, C2, C4 et C5.
Il est donc impossible d'obtenir 25 cases blanches si la cases noire est placée dans l'une des cases de C1, C2, C4 ou C5.
La case noire doit donc se situer dans la colonne C3. Supposons que la case noircie soit placée dans l'une des cases hachurées si dessous.. Si l'on tourne l'échiquier de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre, on se retrouve dans la situation précédente où la case noircie est dans l'une des colonnes C1, C2, C4 , C5. Il n'y a donc pas de solution.





La case noire doit onc être la case centrale. Une solution possible :