Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 1**

Parution lundi 3 octobre **Retour attendu pour le jeudi 20 octobre**

Exercice 1 À la recherche de contre-exemples

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple.

1. Une équation polynomiale du second degré a-t-elle toujours deux solutions réelles ?
2. La somme de deux nombres premiers est-elle toujours un nombre premier ? un nombre pair ?
3. Est-il vrai que tout quadrilatère du plan ayant trois côtés de même longueur est un losange ?
4. Calculer le nombre $N = n^2 + n + 41$ pour toutes les valeurs de n strictement inférieures à 40. Peut-on en déduire que l'entier N est un nombre premier pour toutes les valeurs de n ?

Exercice 2 Exercice pas commode

Cet exercice propose quelques utilisations du *Principe des tiroirs* (ou *Principe de Dirichlet,* d'après Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand, on trouve aussi l'expression anglaise *pigeonhole principle*). Lorsqu'on range n objets dans un meuble ayant moins de n tiroirs, l'un des tiroirs contient au moins deux objets.
Ce principe est un outil puissant dans des raisonnements en mathématiques.

Justifier les affirmations suivantes :

a) Sachant qu'un individu n'a jamais plus de 350 000 cheveux sur la tête, au moins deux personnes habitant Paris ont le même nombre de cheveux.
b) Soit a, b et c trois nombres entiers. Montrer que le produit $(a-b)(b-c)(c-a)$ est un nombre pair.
c) Si on considère 12 nombres entiers distincts compris entre 1 et 99, on peut en trouver deux tels que leur différence (positive) soit un nombre jumeau (un nombre à deux chiffres identiques).
d) Soit n un entier supérieur ou égal à 1, alors dans tout sous-ensemble E de $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ contenant $n+1$ éléments, il existe deux entiers distincts a et b tels que a divise b. (on pourra remarquer que tout élément de $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ peut s'écrire de manière unique $2^r p$ où r est un entier positif ou nul et p un entier impair).

Exercice 3 Polynômes et nombres premiers

Définition : On dit qu'un entier naturel est premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs 1 et lui-même.
Pour factoriser une expression littérale, on peut :

- trouver un facteur commun ;
- utiliser une identité remarquable, notamment, pour tous nombres a et b, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;
- faire apparaitre une identité remarquable (on parle alors de « factorisation forcée »).

Dans cet exercice, on cherche s'il existe des entiers naturels n tels que le nombre $N = n^4 + n^2 + 25$ soit un nombre premier.

1. En complétant l'égalité $x^4 + 25 = (x^2+5)^2 - \cdots$, déterminer deux polynômes P et Q tels que, pour tout réel x, $x^4 + x^2 + 25 = P(x) \times Q(x)$.
2. Montrer que les équations $P(x) = 1$ et $Q(x) = 1$ n'ont pas de solutions.
3. Conclure.

Exercice 4 Différences finies et calculs de sommes

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des entiers $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.
Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

1. a) Déterminer les polynômes P de degré 2 tel que, pour tout réel x, $P(x+1)-P(x)=x$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
2. a) Déterminer les polynômes Q de degré 3 tel que, pour tout réel x, $Q(x+1)-Q(x)=x^2$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5 Multiples et diviseurs

Définition : on dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier p s'il existe un entier k tel que $m=kp$.
On peut dire aussi que l'entier p divise m, mais attention à ne pas écrire de *quotient*, car on sortirait de l'arithmétique.
Propriété : si un nombre entier a est multiple de deux nombres entiers b et c, alors il est multiple du nombre $b+c$.
Théorème : soit a et b deux entiers naturels tels que $b\neq 0$, il existe un unique couple d'entiers naturels (q,r) tel que $a=bq+r$ et $r<b$.
On dit alors que q et r sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b.

1. Montrer qu'un entier N dont l'écriture décimale est $\overline{cdu}$ est un multiple de 8 si et seulement si $4c+2d+u$ est un multiple de 8.
2. Montrer que qu'un entier N de quatre chiffres est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres en écriture décimale est un multiple de 9. Expliquer comment généraliser ce résultat.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, le produit $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6. On pourra considérer les restes de la division euclidienne de n par 6.

Exercice 6. Relations métriques dans un triangle rectangle

Dans un problème faisant intervenir des relations métriques dans un triangle rectangle, on pense évidemment au théorème de Pythagore mais on peut aussi faire appel :
- aux triangles semblables ou aux triangles isométriques ;
- à des calculs d'aires
- à une transformation conservant les distances (symétrie, translation, rotation)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu du segment [BC].
Montrer que :
(1) $\mathrm{AB}^2=\mathrm{BH}\times\mathrm{BC}$ et $\mathrm{AC}^2=\mathrm{CH}\times\mathrm{CB}$.
(2) $\mathrm{AH}^2=\mathrm{BH}\times\mathrm{CH}$.
(3) $\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}$.
(4) $\mathrm{OA}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$.

Exercice 7. Comparaison de moyennes

Trois principes de base :
(1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.
(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.
(3) Pour étudier le signe d'une expression, on peut l'écrire sous forme de produit ou de quotient.

1. Étude algébrique

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, on appelle respectivement moyenne arithmétique, moyenne géométrique et moyenne harmonique les trois réels suivant :
$m=\frac{a+b}{2}$, $g=\sqrt{ab}$ et $h=\frac{2ab}{a+b}$.
Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b, $m\geq g\geq h$.

2. Étude géométrique

Dans la figure ci-contre, si on note $\mathrm{AH}=a$ et $\mathrm{HB}=b$, montrer que :
$\mathrm{OC}=\frac{a+b}{2}$, $\mathrm{CH}=\sqrt{ab}$ et $\mathrm{CK}=\frac{2ab}{a+b}$.
(on pourra utiliser les résultats obtenus dans l'exercice sur les relations métriques dans un triangle rectangle).
Retrouver, grâce à la figure ci-contre, l'encadrement précédemment démontré algébriquement.