Pépinière académique de mathématiques
Année 2023-2024 **Stage « filé »**
Classe de première **Fiche numéro 1**
Parution lundi 16 octobre **Retour attendu pour le mardi 7 novembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 Divers types de raisonnement

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. On établit un théorème (ou une propriété) grâce à un *raisonnement* (une *démonstration*). Il existe divers types de raisonnements. Le plus souvent utilisé est le raisonnement déductif (construit à l'aide d'une suite d'implications) mais d'autres types de raisonnement peuvent s'avérer plus appropriés.
L'objectif de cet exercice est de bien appréhender trois types de raisonnement : le raisonnement par contre-exemple, le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par disjonction de cas.

1. Contre-exemple

Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple : un exemple d'objet mathématique (nombres, figures géométriques, fonctions…) pour lequel l'affirmation est fausse.

Peut-on affirmer que :

a. deux rectangles de même périmètre ont la même aire ?
b. pour tous réels x et y positifs, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

2. Par l'absurde

Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer la véracité d'une affirmation consiste à montrer que le contraire de cette affirmation est faux. Dans le cas d'une implication, cela revient à supposer que la conclusion est fausse pour aboutir à une contradiction.

a. On considère un carré ayant pour aire 170. Montrer que la longueur de ses côtés est strictement supérieure à 13.
b. On considère un rectangle ayant pour aire 170. Montrer que sa longueur est strictement supérieure à 13.
c. Montrer que si n est un entier dont le carré est impair alors n est impair.

3. Par disjonction des cas

Le raisonnement par disjonction de cas est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à décomposer la proposition que l'on cherche à démontrer en un nombre fini de cas (sous-propositions) vérifiés indépendamment, ces cas ne se chevauchant pas et couvrant à eux tous toutes les possibilités (on parle alors de *partition* des cas).

a. Montrer que pour tout entier n, $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3 (on étudiera les 3 cas correspondant aux restes possibles de la division euclidienne de n par 3).
b. Montrer que pour tous réels a et b, si $Max(a,b)$ désigne le plus grand des nombres a et b, alors

$$Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|).$$

Autour des inégalités

Quelques principes de base dans le traitement d'inégalités :
(1) Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.
(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

Exercice 2 Encadrements et valeurs approchées par excès

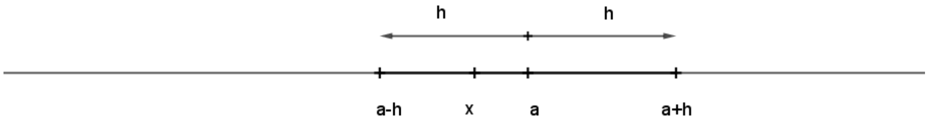
Les lectures graphiques de positions relatives de courbes donnent des approximations pouvant conduire à des conjectures. Le calcul algébrique assure des affirmations s'appuyant sur les propriétés des inégalités.

On considère les fonctions f, g et h définies sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = 1-x$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ et $h(x) = 1-x+x^2$.

1. Représenter ces trois fonctions dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et conjecturer des inégalités vérifiées pour tout réel x de $]-1, +\infty[$ entre $f(x), g(x)$ et $h(x)$.
2. Étudier, suivant les valeurs de x dans $]-1, +\infty[$, le signe de $g(x) - f(x)$ et de $h(x) - g(x)$.

Quelques définitions :
Soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif.

- On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.



Cela signifie que la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à h.

- On dit que a est une valeur approchée de x par défaut à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a \leq x \leq a + h$.
- On dit que a est une valeur approchée de x par excès à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a$.

3. En déduire l'écriture décimale d'une valeur approchée à 10^{-20} de $\frac{1}{1+10^{-10}}$.

Exercice 3 Convexité, concavité

Soit f la fonction carré et $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer que pour tous réels a et b, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.
2. Interpréter graphiquement cette inégalité.
3. En déduire, si a et b sont positifs, une inégalité entre $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ et en donner une interprétation graphique.

Exercice 4 Relations métriques dans un triangle rectangle

Dans un problème faisant intervenir des relations métriques dans un triangle rectangle, on pense évidemment au théorème de Pythagore mais on peut aussi faire appel :

- aux triangles semblables ou aux triangles isométriques ;
- à des calculs d'aires
- à une transformation conservant les distances (symétrie, translation, rotation)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu du segment [BC].
Montrer que :
(1) $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC}$ et $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH} \times \mathrm{CB}$.
(2) $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$.
(3) $\mathrm{AH} \times \mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$.
(4) $\mathrm{OA} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$.

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.
Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

Exercice 5

Remarquons pour commencer que $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$, $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121$, etc. Il semble que chaque fois qu'on ajoute 1 au produit de quatre entiers consécutifs, on obtient un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier).
L'objectif de cet exercice est de prouver ce résultat.

1. Développer le polynôme $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x^2 + ax + b)^2$.
3. Conclure.