ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 — **Stage « filé »**

Classe de première — **Fiche numéro 2**

Parution lundi 27 novembre — **Retour attendu pour le jeudi 14 décembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Factorisation et nombres premiers

Définition : on dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier p s'il existe un entier k tel que $m = kp$.

On peut dire aussi que l'entier p divise m, mais attention à ne pas écrire de *quotient*, car on sortirait de l'arithmétique.

Démontrer une implication $A \Longrightarrow B$ est équivalent à montrer que non $B \Rightarrow$ non A.

1. Soit k un entier supérieur ou égal à 2 et x un nombre réel.
   Développer et réduire le produit $(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1)(x - 1)$.
2. En déduire que si d est un diviseur de n alors $x^n - 1$ est factorisable par $x^d - 1$.
3. Démontrer que si $2^n - 1$ est un nombre entier premier alors n est un nombre entier premier.

Exercice 2 – Différences finies et calculs de sommes

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.

Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

1. **a.** Déterminer les polynômes P de degré 2 tel que, pour tout réel x, $P(x+1) - P(x) = x$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. **a.** Déterminer les polynômes Q de degré 3 tel que, pour tout réel x, $Q(x+1) - Q(x) = x^2$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3 – Positions relatives de courbes

Méthode : pour étudier la position relative de deux courbes C_f et C_g sur un ensemble D, on compare les nombres $f(x)$ et $g(x)$ lorsque $x \in D$.

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriété : Soit a et b deux réels positifs, $a \leq b$ si et seulement si $a^2 \leq b^2$.

Soit f, g et h les fonctions définies sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2 - 4x + 5$, $h(x) = \sqrt{x+1}$. On note respectivement C_f, C_g, C_h leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Tracer les trois courbes.
2. Étudier la position relative
   a. des courbes C_f et C_g **b.** des courbes C_f et C_h.
3. Déterminer les coordonnées du point commun aux trois courbes.

Exercice 4 – Médianes concourantes et droite d'Euler

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :
- caractérisation du milieu I d'un segment [AB] par l'une des égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou, pour un point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs
- parallélogramme par l'égalité de deux vecteurs
- relation de Chasles…

Théorème : les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé centre de gravité du triangle et il est situé au tiers de chaque médiane, en partant de la base.

1. Démonstration du théorème : soit ABC un triangle et soit $\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}$ les milieux respectifs des segments $[\mathrm{BC}], [\mathrm{CA}], [\mathrm{AB}]$. On note G le point d'intersection des médianes (BJ) et (CK) et D le symétrique de A par rapport à G.
   a. Montrer que le quadrilatère BDCG est un parallélogramme.
   b. En déduire que G est situé sur (AI) et préciser la position de G sur chaque médiane.
   c. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)$.
2. Soit respectivement O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et soit H le point du plan défini par $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$.
   a. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
   b. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
3. Montrer que les points O, H et G sont alignés.

Exercice 5 – Alignement et parallélisme en géométrie analytique

Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :
- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;
- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;
- traduisant sur ses coordonnées l'appartenance d'un point à une droite.
Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

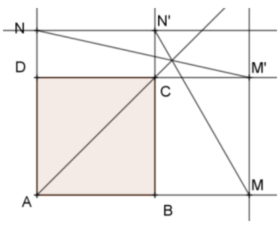
Soit ABC un triangle non aplati. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA].
On considère un point D et on note E et F les images respectives du point D par les translations de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{KB}}$.
1. On se place dans le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.
   a. Déterminer la nature du quadrilatère EAJF.
   b. Montrer que si G est le milieu du segment [EF] alors les droites (DG) et (BC) sont parallèles.
2. Sans utiliser de repère, retrouver le résultat de la question **a.**

Exercice 6 – Famille de droites

En géométrie analytique, il est indispensable de savoir :
- traduire sur une équation de droite les éléments caractéristiques d'une droite (vecteur directeur, coefficient directeur, appartenance d'un point …) ;
- trouver à partir d'une équation de droite ces mêmes éléments caractéristiques.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout réel m, on considère l'ensemble D_m des points $M(x, y)$ tels que : $(m-3)x - my + 3 - 3m = 0$.
1. Vérifier que pour tout réel m, D_m est une droite.
2. Pour quelle valeur de m, la droite D_m est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? à l'axe des ordonnées ?
3. Montrer que toutes les droites D_m passent par un même point I dont on donnera les coordonnées.
4. Pour quelle valeur de m le nombre -1 est -il le coefficient directeur de la droite D_m ? Existe-il pour tout réel p une droite D_m de coefficient directeur p ?
5. Soit $A(3, -1)$ et $B(6,2)$. Pour quelle valeur de m la droite D_m a-t-elle même ordonnée à l'origine que la droite (AB) ?

Exercice 7 – Droites concourantes



Deux droites du plan sont parallèles ou sécantes. Lorsque trois droites ont un point commun, on dit qu'elles sont *concourantes* (ce terme a été utilisé dans un exercice précédent).
Soit a et b deux réels distincts de 0 et de 1. On considère un carré ABCD de côté 1, et le repère orthonormé d'origine A et d'axes (AB) et (AD) (avec l'orientation nécessaire). Les points M et N ont respectivement pour couples de coordonnées $(a, 0)$ et $(0, b)$. Les points M' et N' sont respectivement les points de couples de coordonnées $(a, 1)$ et $(1, b)$.
1. À quelle condition portant sur a et b les droites (MN') et (NM') sont-elles parallèles ?
2. Montrer que, si cette condition n'est pas réalisée, les droites (MN'), (NM') et (AC) sont concourantes.