ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 1**

Parution lundi 18 octobre **Retour attendu pour le vendredi 12 novembre**

Exercice 1 Suites adjacentes

Définition : deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

1. <u>Démonstration :</u> on considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et en déduire que tous ses termes sont positifs.

b. En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, qu'elles ont même limite l, et que pour tout entier n, $u_n \leq l \leq v_n$.

2. <u>Application :</u> on considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur **N*** par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

a. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Soit e leur limite commune. Déterminer un encadrement de e d'amplitude 10^{-9}.

c. Montrer que le nombre e est un irrationnel. (On pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$ et partir de l'encadrement $u_q < e < v_q$).

Exercice 2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires alors il existe un réel c tel que $f(c) = 0$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer ce théorème.

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires et on construit les suites (u_n) et (v_n) telles que :

$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier n,

si $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) \times f(a) \geq 0$ alors $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$

si $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) \times f(a) < 0$ alors $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune c vérifie $f(c) = 0$.

Exercice 3 Sommes de carrés

<u>Théorème :</u>

pour tout entier naturel non nul n, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1. Démontrer ce résultat par récurrence.

2. Déterminer, pour tout entier n, les sommes :

$S_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n-2)^2 + (2n)^2$, somme des n premiers entiers pairs ;

$S'_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-3)^2 + (2n-1)^2$, somme des n premiers entiers impairs.

Exercice 4 Équations fonctionnelles
Équation fonctionnelle de Cauchy
On veut montrer que toutes les fonctions f définies et continues sur **R** telle que pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont linéaires.
a. Soit f une telle fonction, montrer que $f(0) = 0$ et que pour tout entier naturel non nul n,
$f(nx) = nf(x)$. (1)
b. Montrer que cette égalité est aussi vraie pour tout entier n négatif.
c. En remarquant que si p et q sont deux entiers tels que $q \neq 0$, $q \times \frac{p}{q} = p$, en déduire que l'égalité (1) est vérifiée pour tout réel x et tout rationnel r. En déduire qu'il existe un réel k tel que pour tout rationnel r, $f(r) = kr$.
d. On admet que tout nombre réel x peut être obtenu comme limite d'une suite (r_n) de nombres rationnels. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = kx$.
e. Conclure

Exercice 5 Fonction exponentielle
On sait que la fonction exponentielle est définie et dérivable sur **R** et telle que :
1) pour tous réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
2) $\exp(1) = \mathrm{e}$.
Théorème : Si f une fonction définie sur **R** et telle que :
$f(1) = \mathrm{e}$ et pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, alors f est la fonction exponentielle.

Soit f une fonction définie et dérivable sur **R** et telle que
$f(1) = e$ et pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
Démonstration 1 :
a. Déterminer les valeurs possibles pour $f(0)$. Montrer que $f(0) \neq 0$
b. Si y est fixé, on note g la fonction définie sur **R** par $g: x \mapsto f(x+y)$. Exprimer de deux manières différentes $g'(x)$. En déduire que la fonction f vérifie une équation du type $f' = af$.
c. Conclure.
Démonstration 2 (si on connait la fonction ln) :
a. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$. En déduire le signe de la fonction f.
b. Montrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$ alors f est la fonction nulle.
c. On suppose maintenant que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$ et on pose, pour tout réel x, $g(x) = \ln(f(x))$. Montrer que g vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy.
d. Conclure.

Exercice 6 Sens de variation et comparaison de fonctions
Pour comparer deux expressions, on étudie souvent le signe de la différence. Si une factorisation semble impossible on peut se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction pour en déduire son signe.
En spécialité terminale, on démontre que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur **R** et que pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a $\sin(x) \leq x$.
On pourra étudier sur $[0; +\infty[$ les variations de la fonction f définie par $f(x) = x - \sin(x)$.
2. Démontrer de même successivement que pour tout réel positif ou nul x, on a :
$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \qquad \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
3. En déduire un encadrement de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.

Ces inégalités se généralisent et on peut démontrer que les fonctions cosinus et sinus peuvent être approchées au voisinage de toute valeur, en particulier 0, par des fonctions polynômes. On parle de *développement limité*.

Exercice 7 Tangentes à une parabole

Les fonctions polynômes du second degré sont représentées par des paraboles. Ces courbes et leurs tangentes ont de nombreuses propriétés qui peuvent se démontrer en s'appuyant sur le fait qu'un point appartient à un ensemble si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de l'ensemble dans un repère.

Petit rappel : deux droites du plan sont perpendiculaires si le produit de leur coefficient directeur dans un repère orthonormal est égal à -1.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = kx^2$ où k est un réel donné et un point A du plan de coordonnées (a, b) dans un repère orthonormal.

1. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_f$ à $\mathcal{C}_f$ en M_0.

2. Montrer que la droite $\mathcal{T}_f$ coupe l'axe des ordonnées en un point T qui est le symétrique par rapport à l'origine du projeté orthogonal N_0 de M_0 sur l'axe des ordonnées.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A. Etudier plus précisément le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A.

4. Dans le cas, où il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A, montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires si et seulement si $b = -\frac{1}{4k}$.

5. Toujours dans le cas où il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A, montrer que si M_1 et M_2 sont les deux points de contact de ces tangentes avec la parabole et si I est le milieu de $[M_1M_2]$ alors la droite (AI) est parallèle à l'axe des ordonnées.