ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 2**

Parution jeudi 2 décembre **Retour attendu pour le jeudi 16 décembre**

Exercice 1 Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.

On sait que pour tous nombres strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln e = 1$.

On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien.

On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et telles que pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$(1) \quad f(ab) = f(a) + f(b).$$

a. Calculer $f(1)$.

b. Pour tout nombre réel $a > 0$, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(ax) - f(x)$ où f est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction g ?

c. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.

d. Si on pose $f'(1) = k$, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = k \ln x$.

e. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.

Exercice 2 Un peu plus loin sur la fonction tangente

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, on pose $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

On peut étudier cette fonction en s'appuyant sur les propriétés des fonctions cosinus et sinus :

- ces fonctions sont périodiques de période 2π ;
- la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire ;
- pour tout réel x, $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

On rappelle que 360 degrés $= 2\pi$ radians.

On avait montré dans la fiche 1 que pour tout réel x positif ou nul, $\sin(x) \leq x$ et $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.

1. *Étude de la fonction tangente*

a. Montrer que la fonction tangente est périodique et qu'on peut faire l'étude sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ puis l'étendre à R.

b. Exprimer, pour tout $x \in \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $\tan x$.

c. Etudier les variations de la fonction tangente sur l'intervalle I. Dresser son tableau de variation et préciser les limites aux bornes de I.

d. Construire la courbe représentative de la fonction tangente sur l'intervalle I.

2. Fonction tangente et calculatrice au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

a. Montrer que pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, $0 < \sin x < x$, $0 < 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1$ et $\tan x > x > 0$.

(On a déjà démontré, dans la fiche 1, que pour tout réel positif ou nul x, on a $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ et $\sin(x) \leq x$)

b. En déduire que pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, $\frac{1}{x} - \frac{x}{2} < \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x}$.

c. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $x_n = \frac{\pi}{2} - 10^{-n}$. En déduire un encadrement de $\tan x_n$.

Comment cela se traduit-il sur la calculatrice ?

Exercice 3 Propriétés des combinaisons

Propriétés :

(1) pour tous entiers k et n tels que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(2) pour tous entiers k et n tels que $0 < k \leq n-1$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

(3) pour tout entier n, pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Il y a plusieurs façons de démontrer ces propriétés (raisonnement par récurrence, dénombrement dans des tirages de boules ou des chemins…). Ces méthodes peuvent être reprises pour démontrer d'autres propriétés des combinaisons.

On veut montrer que pour tout entier n,

(i) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$ (ii) $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (iii) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

a. Démontrer par récurrence la relation (i) en s'appuyant sur les propriétés (1) et (2).

b. Démontrer la relation (ii) en s'appuyant sur la propriété (3).

c. Démontrer la relation (iii) en dénombrant des tirages de boules.

d. En considérant la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, démontrer que pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$.

Quelques provisions pour la route, avant d'attaquer les exercices 4 et 5

En géométrie vectorielle, on rappelle que :

- la colinéarité de deux vecteurs permet de démontrer un alignement de points ;
- la nullité d'un produit scalaire permet de démontrer une orthogonalité ;
- le centre de gravité d'un triangle ABC (point de concours des médianes) est le point G tel que $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$.

Exercice 4 Le cercle des neuf points (ou « cercle d'Euler », mais Euler en a tant fait…)

Soit ABC un triangle. On appelle :

- A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] ;
- D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C ;
- G le centre de gravité du triangle ABC.

a. On note O le centre du cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle ABC et H le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$.
Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3\,\overrightarrow{\mathrm{OG}}$. Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?

b. On note I, M, N et P les milieux respectifs des segments [OH], [HA], [HB] et [HC]. On appelle $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle $\mathcal{C}_1$.
Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{IM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{IA'}}$. En déduire que le segment [MA'] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$.

c. Montrer que le point D appartient au cercle $\mathcal{C}_2$.

d. Donner neuf points situés sur le cercle $\mathcal{C}_2$ (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle…)

Exercice 5 Tétraèdre orthocentrique

Soit ABCD un tétraèdre.

a. Démontrer que les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2$.

b. Démontrer que si les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales ainsi que les arêtes (AC) et (BD) alors les arêtes (AD) et (BC) le sont aussi.
On dit alors que le tétraèdre ABCD est *orthocentrique*.

c. Démontrer que si ABCD est un tétraèdre orthocentrique et si A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) alors A' est l'orthocentre du triangle BCD.

Exercice 6 Suite de Fibonacci et « nombre d'or »

Dans l'étude des suites, on se ramène souvent à des suites connues comme les suites arithmétiques ou les suites géométriques. C'est le cas pour les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, c'est-à-dire une relation du type $u_{n+2} = au_n + bu_{n+1}$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie sur **N** par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ (1).
Cette suite est appelée suite de Fibonacci (mathématicien Léonard de Pise dit Fibonacci du 12e siècle).
a. Calculer les 10 premiers termes de la suite.
b. On cherche les suites géométriques vérifiant la relation (1). Si on note q la raison d'une telle suite, déterminer les valeurs possibles de q. On note q_1 et q_2 les deux valeurs possibles.
On admet que toute pour toute suite (u_n) vérifiant la relation (1), il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n, $u_n = aq_1^n + bq_2^n$
c. Déterminer les réels a et b pour que la suite (u_n) soit la suite de Fibonacci. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Partie B

On considère la fuite (v_n) définie sur **N** par, pour tout entier n, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
a. Montrer que pour tout entier n, $v_n = \frac{-q_1^{n+1}+q_2^{n+1}}{-q_1^n+q_2^n}$ et en déduire que la suite (v_n) converge vers un nombre Φ qu'on déterminera.
Ce nombre Φ est appelé « nombre d'or »
b. Montrer que le nombre Φ vérifie les relations suivantes :

(i) $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ (ii) pour tout entier n, $u_n = \frac{\Phi^{n+1} - (-1)^{n+1}\Phi^{-n-1}}{\sqrt{5}}$

c. Expliquer les relations :

$\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$ et $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$