ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 **Stage « filé »**

Classe de terminale **Fiche numéro 1**

Parution lundi 6 novembre **Retour attendu pour le jeudi 23 novembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Dans cette fiche, un raisonnement est régulièrement utilisé pour démontrer qu'une proposition P_n, dépendant d'un entier $n \geq n_0$, est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. Il s'agit du *raisonnement par récurrence* :

- On vérifie que la proposition P_n est vraie pour $n = n_0$ (initialisation) ;
- On montre que si la proposition P_n est vraie pour un entier n, alors la proposition P_{n+1} est encore vraie (hérédité).

On peut alors en déduire que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 1 – Sommes de carrés

Théorème : pour tout entier naturel non nul n, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1. Démontrer ce résultat par récurrence.
2. Déterminer, pour tout entier n, les sommes :
$S_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n-2)^2 + (2n)^2$, somme des n premiers entiers pairs ;
$S'_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-3)^2 + (2n-1)^2$, somme des n premiers entiers impairs.

1. Soit P_n la proposition « $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ »

Initialisation : pour $n = 1$, le terme de gauche dans l'égalité vaut 1 et celui de droite vaut $\frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3 = 1$ donc l'égalité est bien vérifiée.

Hérédité : si pour un entier $n \geq 1$, on a $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, alors

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)$$
$$= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$$

On a donc bien $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$

Ce qui signifie que l'égalité est encore vraie au rang $n+1$.

Remarque : on peut obtenir la dernière égalité de deux façons, soit en cherchant les racines du polynôme $2n^2 + 7n + 6$ pour le factoriser soit en partant de l'égalité qu'on cherche à obtenir puisque si $A = B$ et $C = B$ alors $A = C$.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

2. Il s'agit, dans un premier temps, de se ramener à la somme vue dans la question 1. en remarquant que pour tout entier k, $(2k)^2 = 4 \times k^2$ et donc que $S_n = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2)$

Soit $\boldsymbol{S_n} = 4 \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \boldsymbol{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}$.

On remarque ensuite qu'en additionnant S_n et $S_n{}'$ on obtient une somme du type de la question 1. Plus précisément :
$S'_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n-2)^2)$
Soit $S'_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 - S_{n-1}$
Soit $S'_n = \frac{1}{6}(2n-1)(2n-1+1)(2(2n-1)+1) - \frac{2}{3}(n-1)n(2(n-1)+1)$
Soit $\boldsymbol{S'_n} = \frac{n}{3}((2n-1)(4n-1) - 2(n-1)(2n-1)) = \boldsymbol{\frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)}$

Exercice 2 – Suite négligeable devant une autre suite

En plus des théorèmes sur les limites de fonctions usuelles et sur les opérations (somme, produit, quotient et cas d'indétermination), un théorème intervient souvent dans les recherches de limites :

Théorème d'encadrement (ou « des gendarmes ») :

Soit des suites (a_n), (b_n), (u_n). Si à partir d'un certain rang, on a $a_n \leq u_n \leq b_n$ et si les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite réelle L, alors la suite (u_n) converge vers L.

Définition : Soit des suites (u_n) et (v_n), telles que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$. On dit que la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) lorsque la suite de terme général $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ converge vers 0.

1. Soit des suites (u_n), (v_n), (w_n) telles que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$.

Montrer que si la suite (u_n)est négligeable devant la suite (v_n) et la suite (v_n) négligeable devant la suite (w_n), alors la suite (u_n)est négligeable devant la suite (w_n).

2. Soit des suites (a_n), (b_n), (v_n) telles que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$. Soit k un nombre réel.

Montrer que si les suites (a_n) et (b_n), sont négligeables devant la suite (v_n), alors les suites respectives de terme général $u_n = a_n + b_n$ et $U_n = ka_n$ sont négligeables devant (v_n).

3. Soit m et p des entiers naturels non nuls et les suites de terme général $u_n = n^m$ et $v_n = n^p$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Montrer que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si $m < p$.

4. Soit a et b des nombres réels strictement positifs et les suites de terme général $u_n = a^n$ et $v_n = b^n$.

Montrer que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si $a < b$.

5. **a.** À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $3^n \geq n^2$.
   b. En déduire que la suite de terme général $u_n = n$ est négligeable devant la suite de terme général $v_n = 3^n$.
6. Soit n un entier naturel non nul. On note $n!$ le produit des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n, c'est-à-dire : $n! = n \times (n-1) \dots \times 2 \times 1$.

Soit q un nombre réel strictement supérieur à 1. Soit n_0 le plus petit entier naturel n vérifiant $n > q$.

   a. En utilisant le fait que pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, $\frac{q^n}{n!} = \frac{q}{n} \times \dots \times \frac{q}{n_0} \times \frac{q}{n_0 - 1} \times \dots . \times \frac{q}{1}$, montrer qu'il existe un réel positif A tel que $\frac{q^n}{n!} \leq A r^{n-n_0+1}$ en notant $r = \frac{q}{n_0}$.
   b. En déduire que la suite de terme général $u_n = q^n$ est négligeable devant la suite de terme général $v_n = n!$.
   c. Montrer que la suite de terme général $u_n = q^n$ est négligeable devant la suite de terme général $v_n = n^n$.

1. D'après les hypothèses, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0$; or $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$ donc par le théorème sue la limite d'un produit $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0$; ce qui signifie que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (w_n).
2. ▪ D'après les hypothèses, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{v_n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{v_n} = 0$, donc par le théorème sur la limite d'une somme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{v_n} + \frac{b_n}{v_n}\right) = 0$; puisque pour tout entier naturel n, $\frac{u_n}{v_n} = \frac{a_n + b_n}{v_n} = \frac{a_n}{v_n} + \frac{b_n}{v_n}$, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

La suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

▪ D'après les hypothèses, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{v_n} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} k\frac{a_n}{v_n} = 0$; or $\frac{U_n}{v_n} = \frac{ka_n}{v_n} = k\frac{a_n}{v_n}$; on en déduit $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{v_n} = 0$.

La suite (U_n) est négligeable devant la suite (v_n).

3. Pour tout entier naturel n non nul, $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^m}{n^p} = n^{m-p}$.

Raisonnons par disjonction de cas :

- Si $m > p$, alors $m - p$ est un entier strictement positif et l'on sait alors que $\lim_{n\to+\infty} n^{m-p} = +\infty$.
  La suite (u_n) n'est pas négligeable devant la suite (v_n).
- Si $m = p$, alors $m - p$ est nul et alors $\lim_{n\to+\infty} n^{m-p} = 1$.
  La suite (u_n) n'est pas négligeable devant la suite (v_n).
- Si $m < p$, alors $p - m$ est un entier strictement positif ; et l'on sait $\lim_{n\to+\infty} n^{p-m} = +\infty$. Or $n^{m-p} = \frac{1}{n^{p-m}}$.
  Donc $\lim_{n\to+\infty} n^{m-p} = 0$ et la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

L'étude par disjonction de cas prouve alors l'équivalence : la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si $m < p$.

4. Pour tout entier naturel n , $\frac{u_n}{v_n} = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. Posons $q = \frac{a}{b}$ et raisonnons par disjonction de cas.
   - Si $a > b$, alors q est un réel strictement supérieur à 1 et l'on sait alors que $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
     La suite (u_n) n'est pas négligeable devant la suite (v_n).
   - Si $a = b$, alors $\frac{a}{b} = 1$ et alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$.
     La suite (u_n) n'est pas négligeable devant la suite (v_n).
   - Si $a < b$, alors $0 < q < 1$; et l'on sait $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
     La suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

L'étude par disjonction de cas prouve alors l'équivalence : la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si $a < b$.

5. a. Pour tout entier naturel n, notons P_n la proposition : « $3^n \geq n^2$ »
Initialisation : au rang 0, $3^0 = 1$ et $n^2 = 0$ et P_0 est vraie.
Hérédité : Si pour un entier n, la proposition P_n vraie alors montrons que la proposition P_{n+1} est vraie.
Par produit par 3, $3^n \geq n^2 \implies 3 \times 3^n \geq 3n^2$ donc $3^{n+1} \geq 3n^2$.
Comparons $3n^2$ et $(n+1)^2$.

Pour tout entier naturel n, $3n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - 2n - 1 = 2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$
Pour les valeurs de n égales à 0 ou 1, le nombre $2n^2 - 2n - 1$ est négatif.
Si $n \geq 2$, alors $n - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$ donc par croissance de la fonction carré sur [0 ;+∞[, $\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4}$ et par suite
$2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \geq 3$ donc pour tout entier naturel $n, n \geq 2$, $2n^2 - 2n - 1 \geq 0$.
On en conclut que pour tout entier naturel , $n \geq 2$, $3^{n+1} \geq 3n^2 \geq (n+1)^2$
La démonstration précédente prouve l'hérédité de la propriété P_n , mais seulement à partir du rang $n_0 = 2$.
La proposition P_2 : « $3^2 \geq 2^2$ » étant vraie, le principe de récurrence permet d'affirmer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, la proposition P_n est vraie ; de plus les propositions P_0 : « $3^0 \geq 0^2$ » et P_1 : « $3^1 \geq 1$ » sont vraies donc P_n est vraie pour tout entier naturel n.

b. Pour tout entier naturel n, non nul, $3^n \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{n}{3^n}$ et comme les termes sont positifs : $\frac{1}{n} \geq \frac{n}{3^n} \geq 0$.
Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$.
La suite de terme général $u_n = n$ est donc négligeable devant la suite de terme général $v_n = 3^n$.

6. a. Pour un entier naturel n tel que $n \geq n_0$, $\frac{q^n}{n!} = \frac{q}{n} \times \ldots \times \frac{q}{n_0} \times \frac{q}{n_0 - 1} \times \ldots . \times \frac{q}{1}$.
Notons $A = \frac{q}{n_0 - 1} \times \ldots . \times \frac{q}{1}$; A est un réel positif.
Par décroissance de la suite de terme général $\frac{1}{n}$, pour tout entier k tel que $n_0 \leq k \leq n$, $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n_0}$.
On en déduit, par produit de $n - n_0 + 1$ inégalités de même sens et à termes positifs, que $\frac{q}{n} \times \ldots \times \frac{q}{n_0} \leq \frac{q^{n-n_0+1}}{{n_0}^{n-n_0+1}}$
En multipliant par A (positif) les deux termes de l'inégalité, cela donne $\frac{q^n}{n!} \leq Ar^{n-n_0+1}$ et puisque tous les termes sont positifs $0 \leq \frac{q^n}{n!} \leq Ar^{n-n_0+1}$.

b. La suite de terme général Ar^{n-n_0+1} est une suite géométrique de raison r et $0 < r < 1$; cette suite converge donc vers 0.
Par le théorème d'encadrement, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.
La suite de terme général $u_n = q^n$ est donc négligeable devant la suite de terme général $v_n = n!$.

c. Multiplions entre elles les n inégalités de même sens contenant des nombres positifs
$1 \leq n$; $2 \leq n$; … ; $n - 1 \leq n$; $n \leq n$; cela donne : $n! \leq n^n$.
Par décroissance de la fonction inverse sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n!}$ Et par produit par le réel positif q^n, $\frac{q^n}{n^n} \leq \frac{q^n}{n!}$
Et comme les nombres sont positifs $0 \leq \frac{q^n}{n^n} \leq \frac{q^n}{n!}$.
En utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ et le théorème d'encadrement, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^n} = 0$
La suite de terme général $u_n = q^n$ est négligeable devant la suite de terme général $v_n = n^n$.

Exercice 3 – Suites adjacentes

Quelques principes de base et points de vigilance dans le traitement d'inégalités :
(1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.
(2) On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant le même nombre aux deux membres de cette inégalité.
(3) On change le sens d'une inégalité en multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif.
(4) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

Théorème : toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.
Définition : deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$.

1. L'objectif de cette question est de **démontrer le théorème** suivant : « deux suites adjacentes convergent vers la même limite ».

On considère pour cela deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et en déduire que tous ses termes sont positifs.

b. En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, qu'elles ont même limite l, et que pour tout entier n, $u_n \leq l \leq v_n$.

On peut donc maintenant énoncer et appliquer le théorème :

théorème : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

2. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$0 < u_0 < v_0$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

On veut montrer que ces suites sont adjacentes.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

b. En déduire que, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} < v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

c. Montrer que, pour tout entier n, $0 < v_n - u_n < \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

d. Conclure.

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

a. Pour tout entier naturel n, on a donc $u_n \leq u_{n+1}$ soit $-u_{n+1} \leq -u_n$ et $v_{n+1} \leq v_n$ d'où en ajoutant membre à membre les inégalités, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_n - u_n$, ce qui signifie que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.

Comme de plus $(v_n - u_n)$ converge vers 0, cette suite est à termes positifs.

b. On a alors pour tout entier naturel n, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par v_0 et la suite (v_n) est décroissante minorée par u_0.

Elles convergent donc toutes les deux.

Si on appelle l et l' leurs limites respectives, alors $l' - l = \lim\limits_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0$ d'où $l = l'$.

De plus, comme (u_n) est croissante et de limite l, $u_n \leq l$ et, de façon analogue, $v_n \geq l$.

2. a. Soit P_n la proposition « $0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$ ».

<u>Initialisation :</u>

On a bien $0 < u_0$.

De plus, u_1 et u_0 sont deux nombres positifs donc les comparer revient à comparer leurs carrés.

Or $u_1^2 - u_0^2 = u_0 v_0 - u_0^2 = u_0(v_0 - u_0)$ qui est un nombre positif puisque $0 < u_0 < v_0$ donc $0 < u_0 < u_1$.

De même $v_1^2 - u_1^2 = \left(\frac{u_0+v_0}{2}\right)^2 - u_0 v_0 = \frac{1}{4}(u_0^2 + v_0^2 + 2u_0 v_0 - 4u_0 v_0) = \frac{1}{4}(u_0^2 + v_0^2 - 2u_0 v_0) = \left(\frac{u_0 - v_0}{2}\right)^2$ qui est un nombre positif donc $u_1 < v_1$.

Enfin, $v_0 - v_1 = v_0 - \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{v_0 - u_0}{2}$ qui est un nombre positif car $u_0 < v_0$ donc $v_1 < v_0$.

La proposition P_0 est bien vérifiée.

<u>Hérédité</u> *:* si, pour un entier n, la proposition P_n est vérifiée, c'est-à-dire $0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$, alors, on fait un raisonnement analogue pour montrer que $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < v_{n+2} < v_{n+1}$:

On a déjà $0 < u_{n+1}$.

De plus, u_{n+1} et u_{n+2} sont deux nombres positifs donc les comparer revient à comparer leurs carrés.

Or $u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2 = u_{n+1} v_{n+1} - u_{n+1}^2 = u_{n+1}(v_{n+1} - u_{n+1})$ qui est un nombre positif puisque $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$ donc $0 < u_{n+1} < u_{n+2}$.

De même $v_{n+2}^2 - u_{n+2}^2 = \left(\frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{2}\right)^2 - u_{n+1} v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 + 2u_{n+1} v_{n+1} - 4u_{n+1} v_{n+1}) = \frac{1}{4}(u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 - 2u_{n+1} v_{n+1}) = \left(\frac{u_{n+1} - v_{n+1}}{2}\right)^2$ qui est un nombre positif donc $u_{n+2} < v_{n+2}$.

Enfin, $v_{n+1} - v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{2} = \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{2}$ qui est un nombre positif car $u_{n+1} < v_{n+1}$ donc $v_{n+2} < v_{n+1}$.

La proposition P_{n+1} est bien vérifiée.

On en conclut que pour tout entier n, $0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

b. Pour tout entier naturel n, comme $u_n < u_{n+1}$, $-u_{n+1} < -u_n$ (car $-1 < 0$) d'où $v_{n+1} - u_{n+1} < v_{n+1} - u_n$.

De plus $v_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

On a donc bien, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} < \cancel{v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}}(v_n - u_n)$.

c. Montrons par récurrence que si on pose cette fois-ci P_n : « $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ », alors, pour tout entier n, P_n est vraie.

Initialisation : $\frac{1}{2^0} = 1$ et P_0 est vraie.

Hérédité : si, pour un entier n, P_n est vraie c'est-à-dire $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ alors montrons que P_{n+1} est vraie. D'après le **b.** , $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ et $\frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ en multipliant les deux membres de l'inégalité ci-dessus par $\frac{1}{2}$ qui est un nombre positif. Donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0)$ c'est-à-dire P_{n+1} est vraie.
Conclusion : pour tout entier n, $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

d. On peut maintenant affirmer que, pour tout entier n, $0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$,
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Les deux suites sont donc des suites adjacentes.
Elles convergent vers une même limite.
Remarque : leur limite commune est appelée *moyenne arithmético-géométrique* des nombres u_0 et v_0.

Exercice 4 – Tangentes à une parabole

Les fonctions polynômes du second degré sont représentées par des paraboles. Ces courbes et leurs tangentes ont de nombreuses propriétés qui peuvent se démontrer en s'appuyant sur le fait qu'un point appartient à un ensemble si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de l'ensemble dans un repère.
Petit rappel : deux droites du plan sont perpendiculaires si le produit de leur coefficient directeur dans un repère orthonormal est égal à -1.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = kx^2$ où k est un réel non nul donné et un point A du plan de coordonnées (a, b) dans un repère orthonormal.
1. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_f$ à $\mathcal{C}_f$ en M_0.
2. Montrer que la droite $\mathcal{T}_f$ coupe l'axe des ordonnées en un point T qui est le symétrique par rapport à l'origine du projeté orthogonal N_0 de M_0 sur l'axe des ordonnées.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A. Etudier plus précisément le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A.
4. Dans le cas, où il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A, montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires si et seulement si $b = -\frac{1}{4k}$.
5. Toujours dans le cas où il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A, montrer que si M_1 et M_2 sont les deux points de contact de ces tangentes avec la parabole et si I est le milieu de $[M_1M_2]$ alors la droite (AI) est parallèle à l'axe des ordonnées.

1. Une équation de la tangente $\mathcal{T}_f$ à $\mathcal{C}_f$ en M_0 s'écrit $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ soit, après simplification, $y = 2kx_0x - kx_0^2$.
2. Les coordonnées du point d'intersection T de cette tangente avec l'axe des ordonnées vérifient les deux équations de droite. Son abscisse est donc nulle et son ordonnée vaut $-kx_0^2$. Or le projeté orthogonal N_0 de M_0 sur l'axe des ordonnées a pour abscisse 0 et même ordonnée kx_0^2 que M_0. On vérifie aisément sur les coordonnées que l'origine O du repère est bien le milieu de $[TN_0]$.
De cette propriété Evangelista Toricelli (physicien et géomètre du 17e siècle) a tiré une méthode de construction de tangente à la parabole en M_0 : construire N_0 et T puis la droite (M_0T).
3. $A(a, b)$ appartient à $\mathcal{T}_f$ si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de $\mathcal{T}_f$ soit
$b = 2kx_0a - kx_0^2$, équation du second degré en x_0 qui s'écrit $kx_0^2 - 2kx_0a + b = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2ka)^2 - 4kb = 4k(ka^2 - b)$.
Il existe au moins une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A si et seulement si $4k(ka^2 - b) \geq 0$
Plus précisément :

- Comme $k \neq 0$, il existera une unique tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A si et seulement si $ka^2 - b = 0$ c'est-à-dire A est sur la parabole.
- Si $k > 0$ et $ka^2 - b > 0$ (c'est-à-dire A est en dessous de la parabole) si $k < 0$ et $ka^2 - b < 0$ (c'est-à-dire A est au-dessous de la parabole) ou il existera deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A.
- Si $4k(ka^2 - b) < 0$, il n'existera pas de tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A.

4. Si $ka^2 - b > 0$ les deux solutions de l'équations sont $x_1 = \frac{2ka - \sqrt{4k(ka^2 - b)}}{2k}$ et $x_2 = \frac{2ka + \sqrt{4k(ka^2 - b)}}{2k}$
et les coefficients directeurs des deux tangentes sont $m_1 = 2kx_1$ et $m_2 = 2kx_2$.

Leur produit est $p = \frac{4k^2}{4k^2}\left(4k^2a^2 - 4k(ka^2 - b)\right) = 4kb$. Les deux tangentes sont donc perpendiculaires si et seulement si $b = -\frac{1}{4k}$.

La droite d'équation $y = -\frac{1}{4k}$ est en fait la « directrice » de la parabole.

5. Dire que (AI) est parallèle à l'axe des ordonnées revient à dire que les points A et I ont même abscisse.

Or I a pour abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$. Comme x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $kx_0^2 - 2kx_0a + b = 0$, on sait que $x_1 + x_2 = -\frac{-2ka}{k} = 2a$ et $\frac{x_1+x_2}{2} = a$. Les points A et I ont donc bien même abscisse.

Exercice 5 – Fonctions convexes

Définition : on dit qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I lorsque pour tous points A et B (d'abscisses respectives a et b appartenant à I) de la courbe représentative C_f de cette fonction dans un repère, le segment [AB] est situé au-dessus de C_f sur l'intervalle $[a, b]$.

Propriété : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I.

1. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. On suppose que f'' est positive sur I. Montrer que la courbe représentative de f sur I dans un repère est située au-dessus de toutes ses tangentes.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a. Etudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
   b. En déduire l'inégalité de Bernoulli :

   pour tout réel $x \in [-1, +\infty[$, pour tout entier $n \geq 2$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
3. Inégalité arithmético-quadratrique. Montrer que pour tous réels a et b positifs, $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

(On pourra s'intéresser auparavant à la fonction carré).

1. Soit $x_0 \in I$, la tangente à C_f au point A d'abscisse x_0 a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

La position relative de la courbe C_f et de sa tangente au point A est donnée par le signe de la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$.

f est deux fois dérivable sur I donc φ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Comme f'' est positive sur I, f' est croissante sur I . On en déduit, ci-contre le signe de φ' et le tableau de variation de φ.

x		x_0	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

De plus $\varphi(x_0) = f(x_0) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0))$
Soit $\varphi(x_0) = 0$

On en déduit que pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \geq 0$, ce qui signifie que la courbe représentative de f sur I dans un repère est située au-dessus de toutes ses tangentes.

2. a. La fonction f est deux fois dérivable sur $[-1, +\infty[$ et pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$. Sur $[-1, +\infty[$, f'' est positive donc la fonction f est convexe sur $[-1, +\infty[$.

   b. On applique le résultat du 1. On considère la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 0. Cette tangente a pour équation $y = f(0) + f'(0)x$ soit $y = 1 + nx$.

On a donc bien pour tout réel $x \in [-1, +\infty[$, pour tout entier $n \geq 2$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

3. La fonction carré est une fonction convexe sur **R** car sa dérivée seconde (fonction constante égale à 2) est positive sur **R**. Sa courbe représentative C est donc située en-dessous de ses sécantes.

Soit A et B deux points C d'abscisses respectives a et b (deux réels positifs), le milieu M de [AB] est donc situé au-dessus du point de C de même abscisse que M, ce qui s'écrit : $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Comme deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés on en déduit que $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Exercice 6 – Comparaison de fonctions et étude de dérivabilité

Pour comparer deux expressions, on étudie souvent le signe de la différence. Si une factorisation semble impossible on peut se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction pour en déduire son signe.

En spécialité terminale, on démontre que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur **R** et que pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a $\sin(x) \leq x$.
On pourra étudier sur $[0; +\infty[$ les variations de la fonction φ définie par $\varphi(x) = x - \sin(x)$.
2. Démontrer de même successivement que pour tout réel positif ou nul x, on a :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$$

En déduire un encadrement de $\sin(x)$.

3. On considère la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = x\cos x - \sin x$.

a. Déterminer le sens de variation puis le signe de la fonction g sur $[0, \pi]$. En déduire le sens de variation de la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]0, \pi]$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

b. Montrer que la fonction f est continue en 0.

c. En s'appuyant sur les inégalités démontrées précédemment, étudier la dérivabilité de la fonction f en 0 et en déduire la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentant C la fonction f dans un repère.
(On reviendra à la définition d'une fonction dérivable en x_0).

1. Soit la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(x) = x - \sin(x)$. Par somme, φ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel positif ou nul x, on a $\varphi'(x) = 1 - \cos(x)$ et $\varphi'(x) \geq 0$ donc φ est croissante sur $[0; +\infty[$.
Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que pour tout réel positif ou nul x, $\varphi(x) \geq 0$ soit $\sin(x) \leq x$.

Attention : *il ne faut pas confondre fonction croissante et fonction positive mais l'un permet parfois de déduire l'autre.*

2. On considère de même les fonctions ψ et γ définies sur $[0; +\infty[$ par :
$\psi(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ $\qquad$ $\gamma(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$
Les deux fonctions sont dérivables sur $[0; +\infty[$ et :

- pour tout réel positif ou nul x, $\psi'(x) = -\sin(x) + x = \varphi(x)$ donc $\psi'(x) \geq 0$ donc est ψ est croissante sur $[0; +\infty[$.
  Or $\psi(0) = 0$ donc pour tout réel positif ou nul x, $\psi(x) \geq 0$ soit $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.
- pour tout réel positif ou nul x, $\gamma'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} = \psi(x)$ donc $\gamma'(x) \geq 0$ donc γ est croissante sur $[0; +\infty[$.
  Or $\gamma(0) = 0$ donc pour tout réel positif ou nul x, $\gamma(x) \geq 0$ soit $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$.

Des inégalités obtenues dans la question 2 ., on tire que, pour tout réel positif ou nul x : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

3. **a.** Comme somme et produit de fonctions dérivables sur $[0, \pi]$, la fonction g est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$, $g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$. Pour tout $x \in [0, \pi]$, $x \geq 0, \sin x \geq 0$ donc $g'(x) \leq 0$. La fonction g est décroissante sur $[0, \pi]$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in [0, \pi]$, $g(x) \leq 0$.
Par quotient, la fonction f est dérivable sur $]0, \pi]$, et pour tout $x \in]0, \pi]$, $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
$f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$. On en déduit que la fonction f est décroissante sur $]0, \pi]$.

b. Pour tout $x \in]0, \pi]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ donc, puisque $x > 0$, $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.

c. Pour tout $x \in]0, \pi]$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$.
Or, d'après la question 2, pour tout $x \in]0, \pi]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ soit $-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) - x \leq 0$. En divisant par $x^2 > 0$, $-\frac{x}{6} \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq 0$ d'où, par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.
On en déduit que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
Comme $f(0) = 1$, la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe C est la droite d'équation $y = 1$.

Exercice 7 – Équation fonctionnelle de Cauchy

Une équation fonctionnelle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction. Dans ce type d'équation, on commence souvent par chercher les images de nombres particuliers (par exemple 0 ou 1), puis d'entiers naturels puis relatifs, puis de rationnels avant de déterminer l'image d'un réel quelconque. Cette démarche est courante en post-bac.

On veut déterminer toutes les fonctions f définies et continues sur **R** telles que pour tous réels x et y, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

a. Soit f une telle fonction, montrer que $f(0) = 0$ et que pour tout entier naturel non nul n, $f(nx) = nf(x)$. (1)
b. Montrer que cette égalité est aussi vraie pour tout entier n négatif.
c. En remarquant que si p et q sont deux entiers tels que $q \neq 0$, $q \times \frac{p}{q} = p$, en déduire que l'égalité (1) est vérifiée pour tout réel x et tout rationnel r. En déduire qu'il existe un réel k tel que pour tout rationnel r, $f(r) = kr$.
d. On admet que tout nombre réel x peut être obtenu comme limite d'une suite (r_n) de nombres rationnels. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = kx$.
e. Conclure

a. Si on prend $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$ dont la seule solution est $f(0) = 0$.
Pour $n = 1$, l'égalité (1) est vérifiée.
Si cette égalité est vérifiée pour un entier n, alors pour tout réel x,
$f\big((n+1)x\big) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$
et l'égalité (1) est vérifiée au rang $n + 1$.
Conclusion : pour tout réel x et pour tout entier naturel non nul n, $f(nx) = nf(x)$.
b. Si n est un entier négatif alors $-n > 0$ et pour tout réel x,
$0 = f(0) = f(-nx + nx) = f(-nx) + f(nx)$. Or, comme $-n > 0$, $f(-nx) = -nf(x)$,
d'où $f(nx) = nf(x)$.
c. Pour tout rationnel r, il existe deux entiers p et q tels que $q \neq 0$ et $r = \frac{p}{q}$. D'après les questions ***a.*** et ***b.*** pour tout réel x, $pf(x) = f(px) = f\left(q \times \frac{p}{q}x\right) = qf\left(\frac{p}{q}x\right)$ d'où l'égalité (1) est bien vérifiée pour tout rationnel r et tout réel x.
En particulier, pour $x = 1$, $f(r) = rf(1)$. Il suffit de poser $f(1) = k$.
d. Soit x un réel quelconque. Il existe une suite (r_n) de nombres rationnels telle que $x = \lim_{n\to\infty} r_n$ alors, comme f est continue sur **R**, $f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n)$.
Soit $f(x) = \lim_{n\to\infty} kr_n = k \lim_{n\to\infty} r_n = kx$.
e. On en déduit que les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont les fonctions linéaires.