ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 **Stage « filé »**

Classe de terminale **Fiche numéro 1**

Parution lundi 6 novembre **Retour attendu pour le jeudi 23 novembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Dans cette fiche, un raisonnement est régulièrement utilisé pour démontrer qu'une proposition P_n, dépendant d'un entier $n \geq n_0$, est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. Il s'agit du *raisonnement par récurrence* :

- On vérifie que la proposition P_n est vraie pour $n = n_0$ (initialisation) ;
- On montre que si la proposition P_n est vraie pour un entier n, alors la proposition P_{n+1} est encore vraie (hérédité).

On peut alors en déduire que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 1 – Sommes de carrés

Théorème : pour tout entier naturel non nul n, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1. Démontrer ce résultat par récurrence.
2. Déterminer, pour tout entier n, les sommes :
$S_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n-2)^2 + (2n)^2$, somme des n premiers entiers pairs ;
$S'_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-3)^2 + (2n-1)^2$, somme des n premiers entiers impairs.

Exercice 2 – Suite négligeable devant une autre suite

En plus des théorèmes sur les limites de fonctions usuelles et sur les opérations (somme, produit, quotient et cas d'indétermination), un théorème intervient souvent dans les recherches de limites :
Théorème d'encadrement (ou « des gendarmes ») :
Soit des suites (a_n), (b_n), (u_n). Si à partir d'un certain rang, on a $a_n \leq u_n \leq b_n$ et si les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite réelle L, alors la suite (u_n) converge vers L.

Définition : Soit des suites (u_n) et (v_n), telles que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$. On dit que la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) lorsque la suite de terme général $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ converge vers 0.

1. Soit des suites (u_n), (v_n), (w_n) telles que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$.
Montrer que si la suite (u_n)est négligeable devant la suite (v_n) et la suite (v_n) négligeable devant la suite (w_n), alors la suite (u_n)est négligeable devant la suite (w_n).

2. Soit des suites (a_n), (b_n), (v_n) telles que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$. Soit k un nombre réel.
Montrer que si les suites (a_n) et (b_n), sont négligeables devant la suite (v_n), alors les suites respectives de terme général $u_n = a_n + b_n$ et $U_n = ka_n$ sont négligeables devant (v_n).

3. Soit m et p des entiers naturels non nuls et les suites de terme général $u_n = n^m$ et $v_n = n^p$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
Montrer que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si $m < p$.

4. Soit a et b des nombres réels strictement positifs et les suites de terme général $u_n = a^n$ et $v_n = b^n$.
Montrer que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si $a < b$.

5. **a.** À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $3^n \geq n^2$.
b. En déduire que la suite de terme général $u_n = n$ est négligeable devant la suite de terme général $v_n = 3^n$.

6. Soit n un entier naturel non nul. On note $n!$ le produit des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n, c'est-à-dire : $n! = n \times (n-1) \ldots \times 2 \times 1$.
Soit q un nombre réel strictement supérieur à 1. Soit n_0 le plus petit entier naturel n vérifiant $n > q$.

a. En utilisant le fait que pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, $\frac{q^n}{n!} = \frac{q}{n} \times \ldots \times \frac{q}{n_0} \times \frac{q}{n_0 - 1} \times \ldots . \times \frac{q}{1}$, montrer qu'il existe un réel positif A tel que $\frac{q^n}{n!} \leq Ar^{n-n_0+1}$ en notant $r = \frac{q}{n_0}$.
b. En déduire que la suite de terme général $u_n = q^n$ est négligeable devant la suite de terme général $v_n = n!$.
c. Montrer que la suite de terme général $u_n = q^n$ est négligeable devant la suite de terme général $v_n = n^n$.

Exercice 3 – Suites adjacentes

Quelques principes de base et points de vigilance dans le traitement d'inégalités :

(1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.

(2) On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant le même nombre aux deux membres de cette inégalité.

(3) On change le sens d'une inégalité en multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif.

(4) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

Théorème : toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.

Définition : deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

1. L'objectif de cette question est de **démontrer le théorème** suivant : « deux suites adjacentes convergent vers la même limite ».

   On considère pour cela deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

   a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et en déduire que tous ses termes sont positifs.

   b. En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, qu'elles ont même limite l, et que pour tout entier n, $u_n \leq l \leq v_n$.

On peut donc maintenant énoncer et appliquer le théorème :

théorème : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

2. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$0 < u_0 < v_0$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.

On veut montrer que ces suites sont adjacentes.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

b. En déduire que, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} < v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

c. Montrer que, pour tout entier n, $0 < v_n - u_n < \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

d. Conclure.

Exercice 4 – Tangentes à une parabole

Les fonctions polynômes du second degré sont représentées par des paraboles. Ces courbes et leurs tangentes ont de nombreuses propriétés qui peuvent se démontrer en s'appuyant sur le fait qu'un point appartient à un ensemble si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de l'ensemble dans un repère.

Petit rappel : deux droites du plan sont perpendiculaires si le produit de leur coefficient directeur dans un repère orthonormal est égal à -1.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = kx^2$ où k est un réel non nul donné et un point A du plan de coordonnées (a, b) dans un repère orthonormal.

1. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_f$ à $\mathcal{C}_f$ en M_0.

2. Montrer que la droite $\mathcal{T}_f$ coupe l'axe des ordonnées en un point T qui est le symétrique par rapport à l'origine du point N_0, projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A. Etudier plus précisément le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A.

4. Dans le cas, où il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A, montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires si et seulement si $b = -\frac{1}{4k}$.

5. Toujours dans le cas où il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A, montrer que si M_1 et M_2 sont les deux points de contact de ces tangentes avec la parabole et si I est le milieu de $[M_1M_2]$ alors la droite (AI) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercice 5 – Fonctions convexes

Définition : on dit qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I lorsque pour tous points A et B (d'abscisses respectives a et b appartenant à I) de la courbe représentative C_f de cette fonction dans un repère, le segment [AB] est situé au-dessus de C_f sur l'intervalle $[a, b]$.

Propriété : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I.

1. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. On suppose que f'' est positive sur I. Montrer que la courbe représentative de f sur I dans un repère est située au-dessus de toutes ses tangentes.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   - **a.** Etudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = (1 + x)^n$.
   - **b.** En déduire l'inégalité de Bernoulli :

     pour tout réel $x \in [-1, +\infty[$, pour tout entier $n \geq 2$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
3. Inégalité arithmético-quadratique. Montrer que pour tous réels a et b positifs, $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

(On pourra s'intéresser auparavant à la fonction carré).

Exercice 6 – Comparaison de fonctions et étude de dérivabilité

Pour comparer deux expressions, on étudie souvent le signe de la différence. Si une factorisation semble impossible on peut se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction pour en déduire son signe.

En spécialité terminale, on démontre que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur **R** et que pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a $\sin(x) \leq x$.

On pourra étudier sur $[0; +\infty[$ les variations de la fonction φ définie par $\varphi(x) = x - \sin(x)$.

2. Démontrer de même successivement que pour tout réel positif ou nul x, on a :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$$

En déduire un encadrement de $\sin(x)$.

3. On considère la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = x\cos x - \sin x$.
   - **a.** Déterminer le sens de variation puis le signe de la fonction g sur $[0, \pi]$. En déduire le sens de variation de la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]0, \pi]$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
   - **b.** Montrer que la fonction f est continue en 0.
   - **c.** En s'appuyant sur les inégalités démontrées précédemment, étudier la dérivabilité de la fonction f en 0 et en déduire la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentant C la fonction f dans un repère.
     (On reviendra à la définition d'une fonction dérivable en x_0).

Exercice 7 – Équation fonctionnelle de Cauchy

Une équation fonctionnelle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction. Dans ce type d'équation, on commence souvent par chercher les images de nombres particuliers (par exemple 0 ou 1), puis d'entiers naturels puis relatifs, puis de rationnels avant de déterminer l'image d'un réel quelconque. Cette démarche est courante en post-bac.

On veut déterminer toutes les fonctions f définies et continues sur **R** telles que :

pour tous réels x et y, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

a. Soit f une telle fonction, montrer que $f(0) = 0$ et que pour tout entier naturel non nul n, $f(nx) = nf(x)$. (1)

b. Montrer que cette égalité est aussi vraie pour tout entier n négatif.

c. En remarquant que si p et q sont deux entiers tels que $q \neq 0$, $q \times \frac{p}{q} = p$, en déduire que l'égalité (1) est vérifiée pour tout réel x et tout rationnel r. En déduire qu'il existe un réel k tel que pour tout rationnel r, $f(r) = kr$.

d. On admet que tout nombre réel x peut être obtenu comme limite d'une suite (r_n) de nombres rationnels. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = kx$.

e. Conclure