ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 — **Stage « filé »**

Classe terminale — **Fiche numéro 2**

Parution lundi 18 décembre — **Retour attendu pour le lundi 15 janvier**

Exercice 1 – Recherche d'extremum

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point et l'existence d'une tangente à sa courbe, on se ramène parfois à la définition :

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit a un réel de I. On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre l tel que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$.

Si cette limite existe mais est infinie, on dit que la fonction n'est pas dérivable en a mais sa courbe admet une tangente verticale.

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. La fonction f admet un extremum en x_0 si et seulement si sa dérivée s'annule **en changeant de signe** en x_0.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le cercle C de centre O et de rayon 1 ainsi que le point I(1,0). Soit $M(x, y)$ un point quelconque de C et N son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
On veut déterminer la position du point M telle que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle MNI soit maximale

1. Après avoir exprimé y en fonction de x, exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de x (par symétrie, on pourra se limiter au cas où $y > 0$).
2. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
   a. Etudier la dérivabilité de la fonction f en -1 et en 1. En déduire une équation des tangentes à C aux points d'abscisses -1 et 1.
   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle $]-1,1[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
   c. Tracer la courbe C.
3. Résoudre le problème posé au départ.

Exercice 2 – Suites croissantes majorées.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est majorée si et seulement si il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.

Théorème : Toute suite croissante et majorée est convergente.

Soit une suite (u_n) dont les termes sont positifs ou nuls, majorée par un nombre réel positif M.
Pour tout entier naturel n, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^k}$.

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}, S_n \leq M \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.
3. Démontrer que la suite (S_n) est majorée.
4. En déduire la convergence de la suite (S_n).
5. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.
   a. Vérifier que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.
   b. En déduire que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 – Suite implicite

Dans de nombreux exercices, les suites sont définies par une expression dite explicite, une expression algébrique ou une expression contenant des fonctions usuelles. Les termes d'une suite dite implicite n'ont pas d'expression algébrique connue, mais sont définies par une propriété comme, par exemple, être solution d'une équation.
Les connaissances nécessaires pour l'exercice suivant sont les propriétés de l'exponentielle et du logarithme, le théorème des valeurs intermédiaires et ses divers corollaires, et des théorèmes sur les limites de suites.

Pour tout entier naturel n non nul, soit la fonction f_n définie dans $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = e^{nx} - x - 2$.
On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer qu'il existe un unique point A du plan, indépendant de l'entier n, appartenant à toutes les courbes C_n.
2. Montrer que la fonction f_n admet en $-\infty$ une limite que l'on déterminera.
3. Montrer que la fonction f_n admet en $+\infty$ une limite que l'on déterminera.
4. Établir le tableau des variations de la fonction f_n.
5. **a.** Exprimer en fonction de l'entier naturel n, le minimum M_n de la fonction f_n.
   b. Montrer que la suite (M_n) est convergente et préciser sa limite.
   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, M_n < 0$.
6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbf{R}$ exactement deux solutions, l'une strictement positive que l'on notera u_n , l'autre négative que l'on notera v_n.
7. **a.** Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
8. **a.** Justifier que la suite (u_n) est convergente.
   b. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 4 – Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.
On sait que pour tous nombres strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln e = 1$.
On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien.

On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et telles que pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$:

(1) $\quad f(ab) = f(a) + f(b)$.

1. Calculer $f(1)$.
2. Pour tout nombre réel $a > 0$, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(ax) - f(x)$ où f est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction g ?
3. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.
4. Si on pose $f'(1) = k$, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = k \ln x$.
5. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.

Exercice 5 – Propriétés des combinaisons

Propriétés :

(1) pour tous entiers k et n tels que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(2) pour tous entiers k et n tels que $0 < k \leq n - 1$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

(3) pour tout entier n, pour tous réels a et b, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Il y a plusieurs façons de démontrer ces propriétés (raisonnement par récurrence, dénombrement dans des tirages de boules ou des chemins…). Ces méthodes peuvent être reprises pour démontrer d'autres propriétés des combinaisons.

On veut montrer que pour tout entier n,

(i) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$ (ii) $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (iii) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

a. Démontrer par récurrence la relation (i) en s'appuyant sur les propriétés (1) et (2).
b. Démontrer la relation (ii) en s'appuyant sur la propriété (3).
c. Démontrer la relation (iii) en dénombrant des tirages de boules.
d. En considérant la dérivée de la fonction $f: x \mapsto (1 + x)^n$, démontrer que pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$.

Exercice 6 – Fonction vectorielle de Leibniz

L'objectif de cet exercice est d'étudier une fonction vectorielle, dite de Leibniz, et la notion de barycentre ainsi que ses applications à la géométrie (points alignés, droites concourantes).

Définition : Soit n points du plan notés $A_1, A_2, \dots, A_n$ et n réels notés $a_1, a_2, \dots, a_n$. On appelle *fonction vectorielle de Leibniz* la fonction $\vec{f}$ qui à tout point M du plan associe le vecteur :

$$\vec{f}(M) = a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n\overrightarrow{MA_n} = \sum_{i=1}^{i=n} a_i\overrightarrow{MA_i}$$

Partie A – Cas général

1. **a.** On pose $m = \sum_{i=1}^{i=n} a_i$. Montrer que si O est un point fixé du plan alors, pour tout point M du plan, $\vec{f}(M) = \vec{f}(O) + m\overrightarrow{MO}$.
   b. Démontrer que si $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$, alors il existe un unique point G du plan tel que $\vec{f}(G) = \vec{0}$.

   Ce point G est alors appelé le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), , \dots, (A_n, a_n)$ et on appelle masse du système de ces n points pondérés la somme $m = \sum_{i=1}^{i=n} a_i$ de leurs coefficients.

2. **a.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{A_1G}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{A_1A_i}$ pour $2 \leq i \leq n$.
   b. Soit ABC un triangle, construire, s'ils existent, le barycentre G_1 des points pondérés $(A, 1), (B, 3)$, le barycentre G_2 des points pondérés $(A, 3), (B, 2), (C, 1)$ et le barycentre G_3 des points pondérés $(A, 2), (B, -1), (C, 2)$
3. Montrer que si λ est un réel non nul et si G est le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2)$, ..., (A_n, a_n) alors G est aussi le barycentre des points pondérés $(A_1, \lambda a_1), (A_2, \lambda a_2), , \dots, (A_n, \lambda a_n)$.

On admet la propriété dite *d'associativité du barycentre* : le barycentre de n points pondérés ne change pas lorsqu'on remplace k d'entre eux, dont la somme m' de leurs coefficients est non nulle, par leur barycentre A affecté du coefficient m'.
Grâce à des regroupements judicieux de points pondérés, cette propriété permet de démontrer que des droites sont concourantes ou que des points sont alignés.

Partie B – Cas particuliers

1. Soit a et b deux réels tels $a + b \neq 0$. Montrer que si G est barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), alors G est aligné avec A et B.
2. Trouver deux réels a et b tels que le milieu I d'un segment [AB] soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b). Les réels a et b sont-ils uniques ?
3. Soit ABC un triangle. Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB], [BC]$ et $[CA]$ et soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$. En utilisant la propriété d'associativité du barycentre, retrouver le fait que les médianes du triangle ABC sont concourantes.
4. Soit ABC un triangle. On considère le point I défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et les points J et K, milieux respectifs de $[BC]$ et $[AJ]$. Montrer que le point C est aligné avec les points I et J.