ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 3**

Parution lundi 29 janvier **Retour attendu pour le jeudi 29 février**

Exercice 1 – Sommes d'inverses et constante d'Euler-Mascheroni

Rappels :

- pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence ;
- pour déterminer le signe d'une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s'annule ;
- on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens.

En algèbre, on étudie des suites définies par $S_n = \sum_{k=k_0}^{k=n} t_k$, où (t_n) est une suite de réels. Ces suites (S_n) sont appelées *séries* et certaines sont très connues. La fiche 1 faisait étudier une série convergeant vers le nombre e. Cet exercice fait étudier deux autres séries très classiques.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

1. **a.** Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

b. Comparer, pour tout entier $k > 1$, les nombres $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{k(k-1)}$. En déduire une majoration du nombre u_n.

c. Montrer que la suite (u_n) converge.

On démontre en fait que la limite de la suite (u_n) est $\frac{\pi^2}{6}$.

2. **a.** Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, un encadrement de $\ln(k+1) - \ln k$.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq v_n \leq 1 + \ln n$. En déduire la limite de la suite (v_n).

3. Soit (w_n) la suite définie par, pour tout entier $n \geq 2$, $w_n = v_{n-1} - \ln n$.

a. Déterminer le sens de variation de la suite (w_n).

b. Montrer que la suite (w_n) converge.

On appelle constante d'Euler-Mascheroni la limite γ de la suite (w_n).

Exercice 2 – On retrouve l'exponentielle

On rappelle que pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n, $a^n = e^{n \ln a}$.

Cet exercice nécessite la connaissance de limites usuelles des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

1. Déterminer, si elle existe, la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{\ln(1+h)}{h}$ et, pour tout nombre réel x, en déduire, si elle existe, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

2. En déduire, pour tout nombre réel x, la limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 – Suites et probabilités

Propriété : si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Cette propriété s'étend à une union finie d'événements deux à deux incompatibles.

Propriété : Soient A et B des événements tels que $p(B) \neq 0$; alors $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.

Cette propriété permet de calculer de nombreuses probabilités en s'appuyant sur un arbre de probabilités.

Une urne contient en proportion 70% de jetons verts, 10% de jetons bleus, 20% de jetons noirs.

On extrait au hasard un jeton de l'urne et l'on note sa couleur.

Un jeu consiste à extraire un jeton de l'urne :

- Si le jeton est bleu, le jeu s'arrête et l'on a gagné.
- Si le jeton est noir, le jeu s'arrête et l'on a perdu.
- Si le jeton est vert, on le replace dans l'urne et l'on recommence l'épreuve.

Soit n un entier naturel non nul. On fixe à n le nombre le nombre de fois ou l'épreuve précédente est réalisée (épreuve qui peut s'interrompre avant le rang n si l'on a au préalable perdu ou gagné).

Pour tout entier $k \geq 1$ inférieur ou égal à n, on note :

- B_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est bleu »
- N_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est noir »
- V_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est vert »
- G_n l'événement « on a gagné à un rang k inférieur ou égal à n »
- P_n l'événement « on a perdu à un rang k inférieur ou égal à n »

1. On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.
   a. Représenter l'épreuve à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b. Calculer la probabilité de chacun des événements V_2, G_2, P_2.

2. n désigne maintenant un entier naturel non nul quelconque. On note respectivement v_n, g_n, p_n la probabilité des événements V_n, G_n, P_n .
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique ; établir l'expression du terme général en fonction de n.
   b. Soit un entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$. Justifier que $p(B_k) = 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$ et $p(N_k) = 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$
   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $g_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$ et $p_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$.
   d. Exprimer g_n et p_n en fonction de l'entier n.
   e. Etudier la convergence des suites $(v_n), (g_n), (p_n)$.

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $g_n > 0{,}32$.

Exercice 4 – Encadrement de $\ln(1 + x)$

Rappels :

- pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence ;
- pour déterminer le signe d'une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s'annule ;
- on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens ;
- pour déterminer une limite, on peut chercher à appliquer le théorème des gendarmes.

1. Etudier le sens de variation puis le signe des fonctions suivantes :
   a. La fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1 + x)$.
   b. La fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.
   c. La fonction h définie sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ par $h(x) = \ln(1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}\right)$.

2. En déduire que :
   a. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
   b. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

3. Etudier la limite éventuelle en 0 de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 5 – Intégrales et inégalités

Définition : le plan étant muni d'un repère orthonormal, on définit l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ comme l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Du discret au continu : dans le calcul de cette intégrale, on parle de « somme continue », le principe étant de décomposer l'intervalle $[a, b]$ en intervalles infiniment petits et de sommer des aires infiniment petites. Il est donc naturel de relier ce calcul intégral à des « sommes discrètes » en décomposant cette fois-ci l'intervalle $[a, b]$ en intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ et de comparer les deux types de sommes. On s'appuie pour cela sur la propriété ci-dessous.

Propriété : soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. L'objectif de l'exercice est de déterminer, si elle existe, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ du quotient $\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$.
Pour cela, on considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^p$.
Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \frac{1}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que $S_n \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq S_n + \frac{1}{n}$.
2. En déduire que la suite (S_n) converge.
3. Conclure.

Exercice 6 : …le désordre, ça vous dérange ?
Définition : On appelle permutation des éléments de l'ensemble $E = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ toute liste à n éléments de E deux à deux distincts.
Propriété : le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n\,! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$
Propriété : si A et B sont deux ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$), alors

$$\mathrm{Card}\ (A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Soit k un entier naturel non nul et une liste ordonnée $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ de k éléments deux à deux distincts.
On appelle *dérangement* de la liste $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ toute permutation des éléments de la liste telle qu'aucun élément ne conserve la même place.
Exemple :
$(2,3,4,1)$ est un dérangement de la liste $(1,2,3,4)$.
$(1,4,3,2)$ n'est pas un dérangement de la liste $(1,2,3,4)$ car 1 et 3 conservent leurs places respectives.
On désigne par D_k le nombre de dérangements d'une liste à k éléments.

1. Ecrire tous les dérangements de chacune des listes suivantes : ***a.*** (1) ***b.*** $(1,2)$ ***c.*** $(1,2,3)$ ***d.*** $(1,2,3,4)$ et donner la valeur des nombres D_1, D_2, D_3, D_4.
2. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et la liste des k entiers $L_k = (1,2,\dots,k)$.
   a. Montrer que le nombre de permutations laissant un unique élément de la liste L_k à sa place est kD_{k-1}.
   b. Déterminer le nombre de permutations laissant exactement deux éléments de la liste L_k à leur place.
   c. Établir la formule : $k\,! = 1 + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} \mathrm{D}_{k-i}$
3. À l'entrée d'une salle de spectacle au début du XX[ième] siècle, cinq hommes déposent au vestiaire leurs chapeaux respectifs. L'employé leur attribue les numéros de porte-manteaux 1, 2 ,3 ,4 ,5 mais en réalité dispose au hasard ces chapeaux sur les cinq porte-manteaux. Quelle est la probabilité qu'à la sortie, aucun des hommes ne se retrouve avec son propre chapeau ?

Exercice 7 – Orthogonalité dans un cercle
On peut démontrer une orthogonalité en prouvant qu'un produit scalaire est nul.
Les propriétés opératoires du produit scalaire alliées à la relation de Chasles sont souvent utiles pour calculer des produits scalaires.

On considère un cercle C de centre O et de rayon R et un point M intérieur au cercle. Par le point M, on mène deux droites perpendiculaires qui coupent le cercle en A et A' pour une droite, en B et B' pour l'autre droite. On note I le milieu de [AB].

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \mathrm{MO}^2 - R^2$.
   (On pourra introduire le point C diamétralement opposé à A sur le cercle C).
2. Montrer que la droite (IM) est la hauteur issue de M dans le triangle MA'B'.

Exercice 8 - section d'un cône par un plan.

Les courbes appelées coniques (parabole ; hyperbole ; ellipse) sont connues et étudiées depuis l'antiquité. Au début du XVII[ème] siècle, Pascal s'est rendu célèbre par son *traité sur les coniques*, une œuvre de jeunesse, dans laquelle il établit certaines propriétés de ces courbes en les considérant comme des sections d'un cône et d'un plan et s'inspirant en cela des travaux de Desargues.

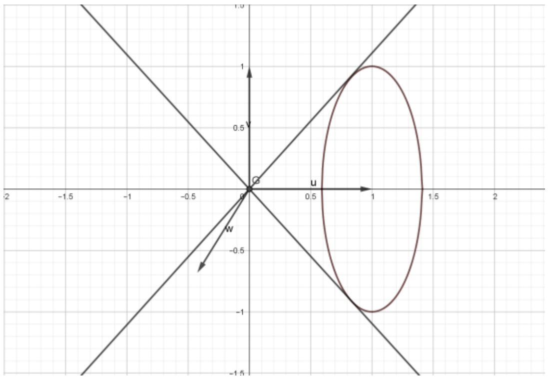
Dans l'exercice qui suit, on se propose d'étudier sur un exemple la courbe d'intersection d'un cône et d'un plan dans un repère orthonormé de l'espace.

▪ On utilisera une représentation paramétrique de droite.

▪ On utilisera ce résultat : si (a, b) est un couple de nombres réels tel que $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe un nombre réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ *et* $b = \sin(\theta)$.

▪ Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe de *f* en $+\infty$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit le point A (0,1,0) ; soit Γ le cercle contenu dans le plan d'équation $y = 1$, de centre A et de rayon 1.
L'ensemble des droites (Om) où m est un point du cercle Γ est un cône de sommet O que l'on nommera (C).
Toute droite (Om) est appelée une génératrice du cône.



<u>Partie A :</u> équation cartésienne du cône (C)

Pour tout point m du cercle Γ, il existe un nombre réel θ tel que le point m ait pour coordonnées $(\cos(\theta), 1, \sin(\theta))$.

1. Soit $m(\cos(\theta), 1, \sin(\theta))$; établir une représentation paramétrique de la droite (Om).

2. Soit $M\ (x, y, z)$ un point du cône (C). Démontrer que $y^2 = x^2 + z^2$.

3. Soit $M\ (x, y, z)$ un point de l'espace tel que $y^2 = x^2 + z^2$.

- ***a.*** Montrer que si $y = 0$, alors $M = O$ (origine du repère).
- ***b.*** Supposons $y \neq 0$. On pose $y = t$. Montrer qu'il existe un réel θ tel que $\begin{cases} x = t\cos(\theta) \\ y = t \\ z = t\sin(\theta) \end{cases}$.
- ***c.*** En déduire qu'un point $M\ (x, y, z)$ appartient au cône (C) si et seulement si $y^2 = x^2 + z^2$.

N.B. La relation $y^2 = x^2 + z^2$ est appelée une équation cartésienne du cône (C).

<u>Partie B</u> : section du cône par un plan.

On considère le plan P d'équation $z = 1$. On désigne par (H) l'intersection du plan P et du cône (C).
Soit le point $B(0, 0, 1)$. On considère le repère orthonormé $(B\ ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan P : un point M du plan P de coordonnées $(x, y, 1)$ dans le repère de l'espace $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(B; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer qu'une équation de (H) dans le repère $(B; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $y^2 = x^2 + 1$.

2. Montrer que si un point $M(x\ ;\ y)$ appartient à (H), alors les points $M_1(-x, y), M_2(x, -y), M_3(-x, -y)$ appartiennent à (H). En déduire que (H) admet des axes et un centre de symétrie que l'on précisera.

3. Montrer que la restriction de (H) au quart du plan P défini par $x \geq 0$ et $y \geq 0$ a pour équation $y = \sqrt{x^2 + 1}$, où $x \geq 0$.

4. On considère la fonction *f* définie dans l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- ***a.*** Montrer que la fonction *f* admet en $+\infty$ une limite que l'on précisera.
- ***b.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$; en déduire l'existence d'une asymptote oblique.
- ***c.*** Etudier le sens de variation de *f* sur l'intervalle $[0\ ; +\infty[$.
- ***d.*** Construire dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f. En déduire l'allure (H), en précisant la construction.

N.B. La courbe (H) est une hyperbole.