Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

académie Versailles

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Stage olympique pour collégiens

25 et 26 octobre 2010

INRIA

UNIVERSITE DE VERSAILLES
SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

La Pépinière académique de mathématiques est une initiative de l'académie de Versailles et de ses partenaires, l'INRIA (Centres de Paris Rocquencourt et de Saclay Île de France), l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. Elle a reçu le parrainage de l'Institut des hautes études scientifiques. Elle organise grâce à des bénévoles des stages destinés aux élèves intéressés et talentueux ***désignés par leurs établissements.***

Emploi du temps

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
Lundi 10 heures	**Calcul et calcul littéral Karim KATEB**	**Géométrie du triangle Isabelle DE GRACIA**	**Raisonnement Michel ABADIE**

Lundi 13 heures	**Raisonnement Michel ABADIE**	**Calcul et calcul littéral Karim KATEB**	**Géométrie du triangle Isabelle DE GRACIA**
Lundi 15 heures	**Géométrie du triangle Isabelle DE GRACIA**	**Raisonnement Michel ABADIE**	**Calcul et calcul littéral Karim KATEB**

Mardi 10 heures	**Géométrie et calculs Christine WEILL**	**Équations Aude CHUPIN ou Martine ZNATY**	**Géométrie Anne ALLARD**

Mardi 13 heures	**Géométrie Anne ALLARD**	**Géométrie et calculs Christine WEILL**	**Équations Aude CHUPIN ou Martine ZNATY**
Mardi 15 heures	**Équations Aude CHUPIN ou Martine ZNATY**	**Géométrie Anne ALLARD**	**Géométrie et calculs Christine WEILL**

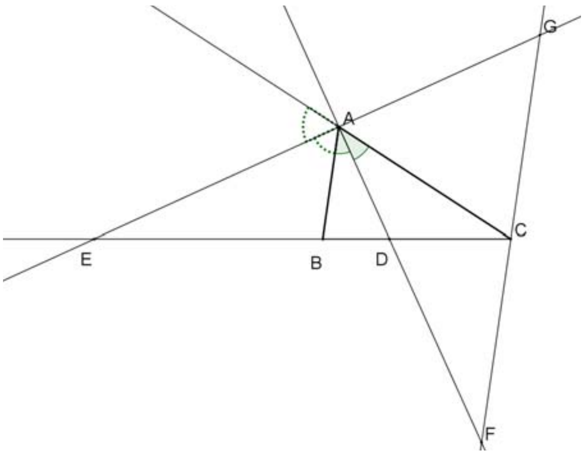
Pépinière académique de mathématiques Lundi 25 & mardi 26 octobre 2010

UFR des sciences de l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines

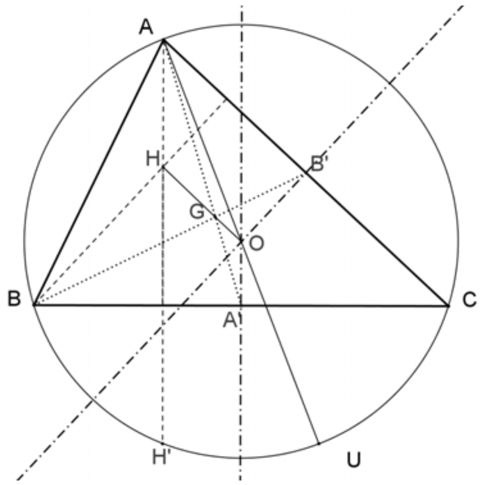
Géométrie du triangle

Les outils de la géométrie à la fin du collège et les configurations classiques

Somme des angles d'un triangle, parallélogramme et symétrie centrale, triangle inscrit dans un demi-cercle, droites remarquables du triangle, angle inscrit, propriété des pieds des bissectrices, droite et cercle d'Euler.



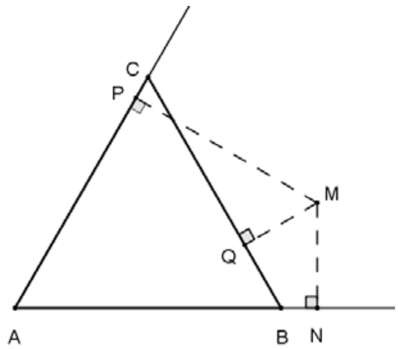
Si D et E sont les pieds des bissectrices issues de A du triangle ABC, alors $\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DC}}=\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{EC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$



La droite d'Euler : le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, son orthocentre et son centre de gravité sont alignés.

Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral.
On considère un point M appartenant au secteur angulaire saillant formé par les demi-droites [AB) et [AC) et extérieur au triangle ABC. Soit N, P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur (AB), (BC) et (AC) respectivement.
Démontrer que la somme MN + MP − MQ est un nombre qui ne dépend pas de la position de M.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{\mathrm{BAC}}=120°$ et D le pied de la bissectrice issue de A dans ce triangle. Démontrer que $\frac{1}{\mathrm{AD}}=\frac{1}{\mathrm{AB}}+\frac{1}{\mathrm{AC}}$.

Exercice 3

1. Soit ABC un triangle tel que AB = 10 et AC = 15. Soit D le pied de la bissectrice issue de A dans le triangle ABC. Démontrer que AD < 12.
2. Soit ABC un triangle tel que AB = c et AC = b. Soit D le pied de la bissectrice issue de A dans le triangle ABC. Exprimer en fonction de *b* et *c* la plus petite valeur que AD ne peut pas dépasser.

Exercice 4

Les longueurs des côtés d'un triangle rectangle sont des entiers. Montrer que le rayon de son cercle inscrit est un entier.

Raisonnement

Exercice 1
Dans une classe, on étudie 12 matières. On considère un groupe de sept élèves, tel que deux quelconques d'entre eux n'aient pas des notes identiques dans toutes les matières. Montrer que l'on peut trouver six matières telles que deux quelconques des élèves aient des notes différentes au moins dans une.

Exercice 2
Placer les huit nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 aux sommets d'un cube, de telle sorte que les sommes obtenues sur chacune des faces soient identiques.

Exercice 3
On écrit tous les nombres entiers compris entre 1 et 30, puis on élimine certains nombres de cette liste, de sorte à obtenir une liste dans laquelle aucun nombre ne soit le double d'un autre (nombre de la liste). Quelle est le nombre maximum de nombres dans cette liste ?

Exercice 4
Le nombre 1 000 est la somme de cinq entiers consécutifs :

$$1\,000 = 198 + 199 + 200 + 201 + 202$$

Trouver une autre façon d'écrire 1 000 comme somme d'entiers consécutifs.

Exercice 5
Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à 900.
Quel est le nombre total de chiffres écrits pour la pagination ?
Combien de fois le chiffre 7 a-t-il été utilisé ? et le chiffre 0 ?

Exercice 6
1. Montrer que pour tout entier strictement positif *n*, $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.
2. Montrer que pour tout entier strictement positif *n*, $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ n'est pas un décimal.

Exercice 7
1. Déterminer le nombre de façons de permuter les chiffres du nombre 123. Quelle est la somme de tous les nombres ainsi obtenus ?
2. Déterminer le nombre de façons de permuter les chiffres du nombre 1234567. Quelle est la somme de tous les nombres ainsi obtenus ?

Exercice 8
On considère une grille 4×4, constituée de 16 cases. Combine au minimum faut-il noircir de cases pour qu'en éliminant deux colonnes quelconques et deux lignes quelconques on soit certain qu'il reste au moins une case noire ?

3. Calcul et calcul littéral

Exercice 1

Trouver les triplets (a, b, c) d'entiers naturels tels que

$$ab+bc+ca=2(a+b+c)$$

Exercice 2

On considère trois nombres positifs tels que, pour chaque paire de nombres choisie, la différence entre la somme de ces deux nombres choisis et le nombre restant soit positive.

Montrer que le produit de ces trois différences est inférieur au produit des trois nombres.

Exercice 3

Soit a, b, c trois nombres strictement positifs tels que $abc = 1$.

Démontrer que : $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$

Exercice 4

Nicolas a additionné les entiers successifs, de 1 à p, avec sa calculatrice. Il a trouvé 2 010. Son professeur lui déclare : « Tu en as oublié un ». Lequel ?

Exercice 5

Soit a, b, c, d quatre réels tels que $a<b<c<d$.

On pose $x=(a+b)(c+d)$, $y=(a+c)(b+d)$ et $z=(a+d)(b+c)$.

Comparer les nombres x, y et z.

Exercice 6

Soit a, b, c et h les longueurs respectives de l'hypoténuse, des côtés de l'angle droit et de la hauteur d'un triangle ABC.

Montrer que $\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2}=(b+c)\frac{a-h}{a}$.

Exercice 6

Soit $a, b, c,$ trois nombres tels que $a+b\neq 0$, $b+c\neq 0$, $c+a\neq 0$.

Montrer que si $a^3+b^3+c^3+abc=0$, alors $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$.

Géométrie

Exercice 1

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles sécants de centres respectifs O et O'. On appelle A l'un des deux points communs à ces deux cercles.
Une droite variable D passant par A recoupe $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement en M et M'. Quelle est la position de D pour laquelle la longueur MM' est maximale ?

Exercice 2

Soit ABCD un carré et E un point du côté [CD].
On appelle F le point d'intersection des droites ((AE) et (BD), G le point du segment [BC] tel que le triangle EFG soit rectangle en F

1. Quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AGF}$?
2. Soit H le point de [GF] tel que AH = GE. Quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{GHE}$?

D'après un problème donné en 2007 en Estonie pour la sélection aux Olympiades

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A, D et E les milieux respectifs des segments [BC] et [AD].
On appelle F le pied de la hauteur issue de D dans le triangle EBD.
Démontrer que le triangle AFC est rectangle en F.
(Olympiades départementales de Roumanie – niveau quatrième – mars 2006)

Exercice 4

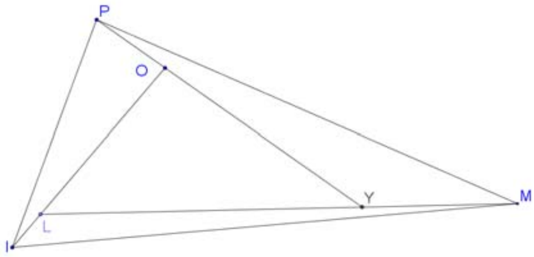
Soit ABCD un quadrilatère convexe tel que $\widehat{CAD} = 45°$, $\widehat{ACD} = 30°$, $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 15°$.

Quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{DBC}$?
(Olympiades de Biélorussie – 2007)

Géométrie et calcul

Exercice 1

1. Sur la figure ci-contre, les points O, L, I sont alignés ainsi que les points P, O, Y et les points L, Y, M.
On suppose de plus que LY = 2 YM, OY = 3 PO et OL = 4 IL.
On sait que l'aire du triangle OLY est égale à 24.
L'aire du triangle PIM est-elle un entier ?



2. Soit OLY un triangle. On considère les points Q, U, E appartenant respectivement aux segments $[\mathrm{OY}]$, $[\mathrm{OL}]$, $[\mathrm{LY}]$ et tels que LY = 2 YE, OY = 3 QO et OL = 4 UL.
On sait que l'aire du triangle OLY est égale à 24. L'aire du triangle QUE est-elle un entier ?

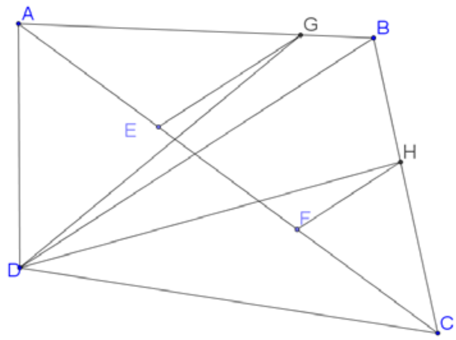
Exercice 2

On cherche à découper un quadrilatère ABCD en trois parties de même aire en traçant deux droites passant par le point D.
Dans la figure ci-contre les points E et F sont situés sur la diagonale $[\mathrm{AC}]$ et vérifient AE = EF = FC.

La parallèle à (BD) passant par E coupe $[\mathrm{AB}]$ en G.

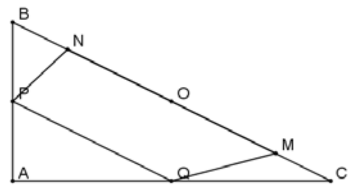
La parallèle à (BD) passant par F coupe $[\mathrm{BC}]$ en H.

Montrer que les droites (DG) et (DH) répondent à la question.



Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AC = 2AB.
On appelle O, P et Q les milieux respectifs des côtés [BC], [BA] et [AC].
Soit M un point du segment [OC] et N le symétrique de M dans la symétrie de centre O. On cherche à déterminer les positions de M pour lesquelles l'aire du triangle ABC est double de celle du quadrilatère MNPQ.



1. Une solution géométrique

a. Lorsque M parcourt le segment [CO] en partant de C, l'aire du quadrilatère MNPQ augmente-t-elle ou diminue-t-elle? En déduire qu'il existe au plus une position de M sur [CO] pour laquelle l'aire du triangle ABC est double de celle du quadrilatère MNPQ.

b. Proposer une solution et en donner une construction.

2. Une solution algébrique

On pose c = AB et x = CM.

a. Exprimer AC et BC en fonction de c.

b. Exprimer l'aire du quadrilatère MNPQ en fonction de c et de x.

Exercice 4

Un radio amateur place un mât d'antenne sur le toit rectangulaire de son garage à l'endroit où il fournit la meilleure réception (on suppose que le mât est orthogonal au plan du toit). Il fixe alors ce mât par des câbles rectilignes en fil de fer qui vont de la cime jusqu'aux quatre coins du toit. Sur ces quatre câbles, deux câbles non consécutifs mesurent 7 mètres et 4 mètres. Un troisième mesure 1 mètre.
Quel est la longueur du dernier câble ?

Équations

Exercice 1

Un commerçant a acheté un stock de crayons par lots de 5 et a obtenu un bon rabais en achetant le même nombre de stylos plumes. Il a acheté 5 € le lot de 5 crayons et 20 € le lot de 5 stylos plumes. Il revend les crayons à l'unité en faisant un bénéfice de 20 % sur chaque crayon vendu et de 25 % sur chaque stylo plume vendu.

Il constate qu'il rentre exactement dans ses frais alors qu'il lui reste 504 pièces en stock dont moins de cinquante crayons.

Combien de crayons a-t-il achetés à son fournisseur ?

Exercice 2

Léo possède une encyclopédie constituée de n tomes, où n est un entier compris entre 5 et 20. Tous les tomes ont le même nombre de pages. La numérotation de chaque tome commence à la page 1. Toutes les pages sont numérotées.

Pour numéroter la totalité des n tomes, on a utilisé 2 006 fois le chiffre 5.

De combien de tomes est constituée l'encyclopédie de Léo ?

De combien de pages est constitué chacun des tomes ?

Exercice 3

On doit transporter 21 futs métalliques dans 3 camions.
7 de ces futs sont pleins et pèsent chacun 50 Kg.
7 sont vides et pèsent chacun 20 Kg.
Les 7 autres sont à moitié pleins.
Comment répartir ces futs dans les camions de telle sorte que chaque camion transporte le même nombre de futs et supporte la même charge ?

Exercice 4

Deux véhicules roulent sur une piste circulaire de longueur 1 800 m. On suppose que la vitesse de chacun est constante. Ils partent du même point. S'ils roulent en sens contraire, ils se croisent toutes les 30 secondes. S'ils roulent dans le même sens, le plus rapide dépasse le plus lent toutes les 2 minutes.
Quelles sont les vitesses de ces deux véhicules ?

Exercice 5

On dispose d'un ensemble de 5 entiers. Si on les ajoute deux à deux, on obtient les dix sommes suivantes :
2001, 2006, 2007, 2008, 2009, 2014, 2017, 2018, 2023, 2025.
Quels sont ces entiers ?

Exercice 6

On sait que $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Déterminer deux entiers positifs m et n tels que $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2003}$

Exercice 7

Sur chacune des six faces d'un cube on inscrit un entier supérieur ou égal à 1. Pour chacun des huit sommets du cube, on forme le produit des trois nombres situés sur les faces contenant le sommet.
La somme des huit nombres obtenus est 70. Quelle est la somme des nombres écrits sur les faces du cube ?