Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

académie Versailles

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DE LA VIE ASSOCIATIVE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Stage olympique pour collégiens

MathC2+

24 et 25 octobre 2011

UNIVERSITE DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

INRIA

La Pépinière académique de mathématiques est une initiative de l'académie de Versailles et de ses partenaires, l'INRIA (Centres de Paris Rocquencourt et de Saclay Île de France), l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. Elle a reçu le parrainage de l'Institut des hautes études scientifiques. Elle organise grâce à des bénévoles des stages destinés aux élèves intéressés et talentueux ***désignés par leurs établissements***. Son action s'inscrit dans le Plan sciences ministériel et particulièrement dans le projet MathC2+.

	Groupe 1	**Groupe 2**	**Groupe 3**	**Groupe 4**
Lundi 10 heures	**Calcul et calcul littéral** **AA**	**Géométrie du triangle** **MS**	**Raisonnement** **MZ**	**Calcul et calcul littéral** **OD KR MD**

Lundi 13 heures	**Raisonnement** **MZ**	**Calcul et calcul littéral** **AA**	**Géométrie du triangle** **MS**	**Géométrie du triangle** **CH BB**
Lundi 15 heures	**Géométrie du triangle** **MS**	**Raisonnement** **MZ**	**Calcul et calcul littéral** **AA**	**Raisonnement** **PB**

Mardi 10 heures	**Cryptographie** **CW**	**Équations** **MT MP**	**Géométrie et calcul** **CL**	**Équations** **CH BB**

Mardi 13 heures	**Géométrie et calcul** **CL**	**Cryptographie** **CW**	**Équations** **MT MP**	**Géométrie et calcul** **KR MD**
Mardi 15 heures	**Équations** **MT MP**	**Géométrie et calcul** **CL**	**Cryptographie** **CW**	**Cryptographie** **AC**

Intervenants : Anne ALLARD (Lycée Les Pierres Vives, Carrières sur Seine), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, Pontoise), Pierre BORNSZTEIN (Lycée Alfred Kastler, Cergy), Antoine CROUZET (Lycée Camille Saint-Saëns, Deuil la Barre), Odile DELASSUS (Lycée Paul-Emile Victor, Osny), Muriel DUGAST (Collège Le Parc, Saint Ouen l'Aumône), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, Pontoise), Carine LILETTE (Lycée Maurice Genevoix, Montrouge), Maud PARTIER (Lycée Charles de Gaulle, Poissy), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, Garges les Gonesse), Monique TALEB (Lycée Hoche, Versailles), Christine WEILL (Lycée Hoche, Versailles), Martine ZNATY (Collège Les Hauts Grillets, Saint Germain en Laye)

Calcul et calcul littéral

Exercice 1

Déterminer tous les nombres entiers positifs de 7 chiffres au plus, divisibles par 6 et dont les chiffres sont des 0 ou des 1.

Exercice 2

Soit *a, b, c, d* quatre entiers tels que $0 \leq a < b < c < d$.
Sachant que la moyenne de ces quatre entiers est 8, quelle est la plus grande valeur possible de *d* ?

Exercice 3

Montrer que pour tous nombres *a* et *b* non nuls et de somme strictement positive on a : $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Préciser dans quel cas il y a égalité.

Exercice 4

Étant donnés trois chiffres distincts *a*, *b* et *c*, il est possible en choisissant deux chiffres à la fois de former six nombres de deux chiffres. Déterminer *a*, *b*, *c* pour que la somme des six nombres soit égale à 484.

Exercice 5

On écrit la liste des nombres entiers, de 1 à *n*, puis on en fait la moyenne. Si on retire un certain nombre *p* de la liste, la moyenne devient 40,75. Quel nombre a-t-on retiré ?

Exercice 6

(a) Calculer le produit $P=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)...\left(1+\frac{1}{2010}\right)\left(1+\frac{1}{2011}\right)$

(b) Calculer la somme : $S=-1+2-3+4-5+6-7+....-2009+2010-2011$.

Exercice 7 La méthode de Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

(a) On raconte que pour calculer la somme des entiers de 1 à 100, le jeune Gauss, alors qu'il était encore écolier, eut l'idée d'écrire cette somme en rangeant les termes par ordre croissant puis décroissant.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} T_{100} & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ T_{100} & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & ... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Puis il ajouta membre à membre les termes des deux égalités.

Démontrer ainsi que $T_{100}=\frac{100\times 101}{2}$

(b) Soit *n* un entier naturel non nul.
Quelle formule obtient-on en faisant la somme des entiers consécutifs de 1 à *n* ?

(c) En déduire la somme des *n* premiers nombres pairs non nuls $2+4+...+2n$ puis la somme des *n* premiers nombres impairs $1+3+...+(2n-1)$.

(d) Calculer $100^2-99^2+98^2-97^2+...+6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2$.

Exercice 8 Sommes télescopiques

Préambule : Considérons par exemple 5 nombres A, B, C, D, E donnés dans cet ordre. En faisant la somme de toutes les différences de deux nombres consécutifs de cette liste, on obtient :
$(A-B)+(B-C)+(C-D)+(D-E)$. Cette somme, qualifiée de « télescopique », est égale à $A-E$.

Remarque : On peut étendre cette propriété à toute liste de 3, 4, 6, 7,…, *n* nombres.

Application

Calculer $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+...+\frac{1}{2008\times 2009}+\frac{1}{2009\times 2010}+\frac{1}{2010\times 2011}$

Pépinière académique de mathématiques. Lundi 24 & mardi 25 octobre 2011

UFR des sciences de l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines – Lycée C. Pissarro PONTOISE

Géométrie du triangle

Exercice 1 Médianes d'un triangle

1. Soit ABC un triangle, A' le milieu du segment [BC] et M un point intérieur au triangle ABC.
Démontrer la propriété suivante : M est un point de la médiane (AA') du triangle ABC si et seulement si les triangles MBA et MCA ont même aire.

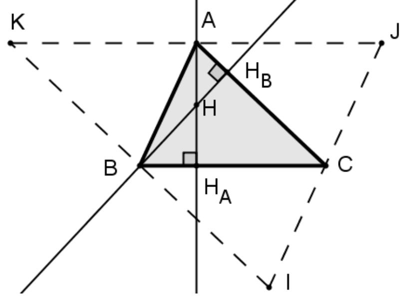
(Indications : pour démontrer la réciproque, on pourra comparer les distances des points B et C à la droite (AM) puis les aires des triangles MBD et MCD, où D est le point d'intersection des droites (MA) et (BC).)

2. Démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Définition : Le point d'intersection des trois médianes d'un triangle est appelé **centre de gravité** de ce triangle**.**

(Indication : Comparer les aires des triangles GAC et GBC.)

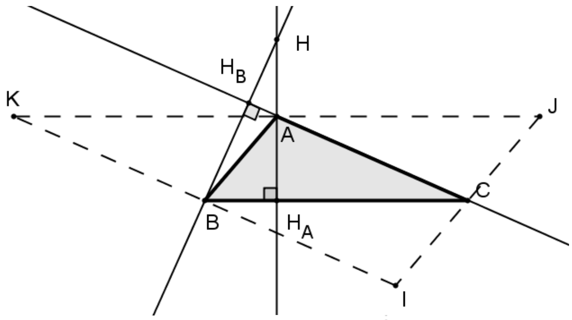
3. Démontrer que le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.
(Indication : Soit A' et B' les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC] d'un triangle ABC et G le centre de gravité de ce triangle. On appelle K le milieu du segment [AG]. Comparer les aires des triangles GBK et GBA' puis les longueurs AK, KG et GK. Conclure.)

Exercice 2 Hauteurs d'un triangle



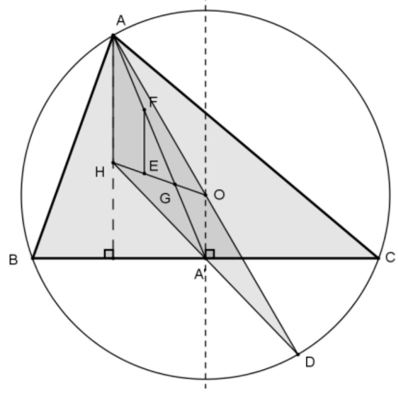
Démontrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Définition : Le point de concours des trois hauteurs d'un triangle est appelé **orthocentre** de ce triangle.



(Indications : Soit H_A et H_B les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B dans le triangle ABC.
On mène par A, B et C les parallèles à (BC), (AC) et (AB) (respectivement. Ces droites déterminent un triangle IJK.
Que peut-on dire des quadrilatères BCAK et BCJA
Que représente la droite (AH_A) pour le segment [KJ] ?
Que représente le point H pour le triangle IJK ?)

Exercice 3 Droite d'Euler



Soit ABC un triangle non équilatéral. On appelle respectivement O, G, H le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre de ce triangle.
Démontrer que les points O, G et H sont alignés et que OH = 3OG.

Définition : La droite qui contient les points O, G et H est appelée droite d'Euler du triangle ABC.

(Indications :on appelle A' le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A dans la symétrie de centre O.

(a) Que représente le point G pour le triangle AHD ? En déduire que les points O, G et H sont alignés.
(b) Soit F le milieu du segment [AO]. La parallèle à (AH) passant par F coupe (HO) en E.
Démontrer que : AH = 2OA' = 2EF. En déduire que EG = GO. Conclure.)

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit L un point de son hypoténuse. Le cercle circonscrit au triangle ABL recoupe la droite (AC) en M, et le cercle circonscrit au triangle ACL recoupe la droite (AB) en N. Montrer que les points L, M et N sont alignés.

Équations

Exercice 1

L'expression $[x]$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Exemple : $[3] = 3$ et $[2.6] = 2$.
Sachant que x est un nombre positif tel que $x[x] = 17$, quelle est la valeur de x ?

Exercice 2

Les masses, en kilogrammes, de cinq citrouilles sont des entiers naturels tous différents. On place ces citrouilles deux par deux sur une balance. Les plus petites masses ainsi obtenues sont 16kg et 18kg, tandis que les plus grandes sont 26kg et 27kg.

(a) Ces informations permettent-elles de déterminer la masse de chacune des citrouilles ?
(b) Si non, combien de cas en tout sont cohérents avec ces informations ? Donner les cinq masses dans chacun des cas.

Exercice 3

On appelle *alphamétique* une équation où les chiffres sont remplacés par des lettres. Un même chiffre ne peut être représenté par deux lettres différentes et une lettre représente un seul chiffre. De plus, un nombre ne doit jamais « commencer » par zéro. Résoudre l'équation consiste à trouver quelle lettre associer à chaque chiffre pour que l'équation soit vérifiée.
Résoudre l'*alphamétique* AMQMA × 6 = LUCIE.

Exercice 4

Combien de nombre(s) entier(s) vérifie(nt) l'équation $2^x\left(6-x\right)=8x$?

Exercice 5

Trois amis ont acheté ensemble le ballon officiel de la coupe du monde de football pour 135 €, qu'ils ont payé à eux trois. Le premier a déboursé une somme inférieure ou égale à celle payée par ses deux amis ensemble. Le deuxième a déboursé une somme inférieure ou égale à la moitié de celle payée par ses deux amis ensemble. Quant au troisième, il a déboursé une somme inférieure ou égale au cinquième de celle payée par ses deux amis ensemble.
Combien chacun a-t'il payé ?

Exercice 6

Un nombre glissant est un nombre qui peut se décomposer en la somme de deux entiers naturels non nuls, pas nécessairement distincts, tels que la somme de leurs inverses s'écrive avec les chiffres du nombre de départ, dans le même ordre et précédés de 0 et d'une virgule..

Exemple : 20 = 10 + 10 et $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0,20$: 20 est donc un nombre glissant
Quels sont les nombres glissants à 2 chiffres ?

Exercice 7

Déterminer tous les couples $\left(x,y\right)$ d'entiers tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}$.

Exercice 8

Sachant que le système d'équations $x=\sqrt{11-2yz}$, $y=\sqrt{12-2zx}$ et $z=\sqrt{13-2xy}$ admet des solutions réelles, calculer la somme $x+y+z$.

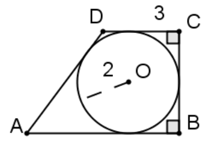
Pépinière académique de mathématiques Lundi 24 & mardi 25 octobre 2011

UFR des sciences de l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines

Géométrie et calcul

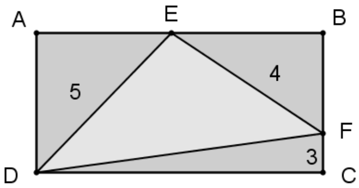
Exercice 1

La figure ci-contre représente un cercle de centre O et de rayon 2 inscrit dans un trapèze rectangle ABCD.
Sachant que DC = 3, calculer l'aire de ce trapèze.



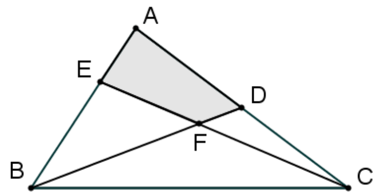
Exercice 2

On considère un rectangle ABCD. Soit E et F deux points appartenant respectivement aux segments [AB] et [BC].
Calculer l'aire du triangle EDF sachant que les aires des triangles DCF, FBE et EAD sont respectivement égales à 3, 4 et 5.



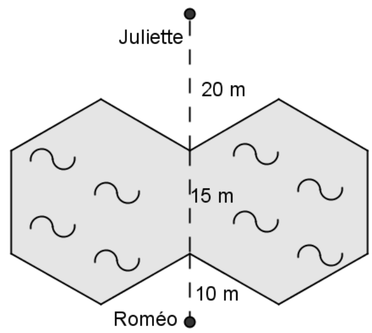
Exercice 3

On considère un triangle ABC. On appelle D le milieu du segment (AC] et E le point du segment [AB] tel que $AE = \dfrac{AB}{3}$.
Sachant que le triangle ABC a une aire de 240 cm^2, calculer l'aire du quadrilatère AEFD.



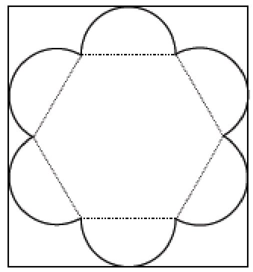
Exercice 4

Juliette veut rejoindre Roméo au plus vite mais il lui est impossible de traverser le bassin en forme de double hexagone régulier.
Quelle distance minimale doit-elle parcourir pour rejoindre Roméo ?



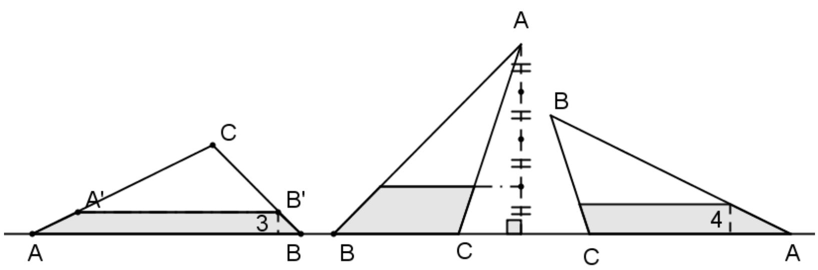
Exercice 5

Un ébéniste découpe une rosace dans une planche rectangulaire comme indiqué ci-contre.
Le pourtour de la rosace est constitué de 6 demi-cercles dont les diamètres sont les côtés d'un hexagone régulier.
Les côtés de cet hexagone ont une longueur de 10 cm.
Quelles sont les dimensions de la planche ?



Exercice 6

On considère un objet triangulaire ABC en plastique translucide d'une épaisseur constante et contenant un liquide coloré. On suppose que AB = 36.
Lorsque l'objet est placé sur la base [AB] à l'horizontale, le liquide atteint la hauteur 3. Lorsque l'objet est placé sur la base [BC] à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur égale au quart de la hauteur issue du sommet A. Lorsque l'objet est placé sur la base [AC] à l'horizontale, le liquide atteint la hauteur 4. Que vaut AC ?



Pépinière académique de mathématiques Lundi 24 & mardi 25 octobre 2011

UFR des sciences de l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines

Raisonnement

Le principe des tiroirs

« Si vous disposez d'une commode avec 5 tiroirs et que vous devez ranger 6 objets, alors au moins un des tiroirs contiendra au moins 2 objets. ».

Exercice 1 Montrer que parmi 11 entiers quelconques on peut en trouver deux a et b tels que $a - b$ soit divisible par 10.

Exercice 2 Combien de personnes faut-il réunir pour être sûr que 2 d'entre elles (respectivement 3, 4, …, n) sont nées le même jour (mais pas nécessairement la même année) ?

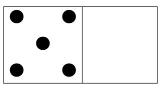
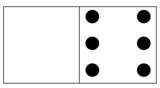
Exercice 3 Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou 1.

Exercice 4 On place 51 points au hasard sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

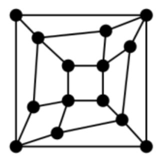
Raisonnements utilisant la parité ou le coloriage

Exercice 5 Un barman a devant lui 10 verres dont 5 sont à l'envers. Pourra-t-il, en retournant toujours simultanément une paire de verres et en répétant à volonté cette opération, obtenir finalement les dix verres avec le bord en haut ? Ou au contraire, avec le bord en bas ?

Exercice 6

On considère un jeu de dominos (quel en est le nombre d'éléments ?)
Peut-on à l'aide de ce jeu construire une chaîne comprenant tous les dominos du jeu commençant par un  et se terminant par un  ?

Exercice 7

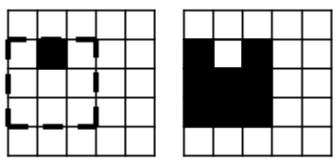


La figure ci-contre schématise un réseau routier reliant 14 villes.
Existe-t-il un chemin passant exactement une fois par ces 14 villes ?

Exercice 8

Considérons un échiquier 5 × 5. On colorie une case en noire, toutes les autres restant blanches. A chaque étape, on peut changer la couleur de toutes les cases d'un « sous-carré » a × a (a entier compris entre 2 et 5), le but étant d'obtenir 25 cases blanches.
Où peut-on placer la case noire initiale pour parvenir à une solution ?

Exemple



configuration initiale — étape n°1

Responsables : Marie-Françoise BOURDEAU, Véronique MESSEANT, Pierre MICHALAK, Evelyne ROUDNEFF, Inspecteurs pédagogiques régionaux, Académie de Versailles

Organisation matérielle : F. CHAUVIN (Rectorat de Versailles), F.GOEHRS (U.V.S.Q.), G. HERIPRET (Lycée Pissarro)