Calcul et calcul littéral

Exercice 1

Solution : Un polygone convexe régulier à n côtés a n angles internes de mesure $180-\frac{360}{n}=180\left(1-\frac{2}{n}\right)$.

On cherche n entier supérieur ou égal à 3 tel que $163 \leq 180\left(1-\frac{2}{n}\right) \leq 164$. Ce qui équivaut à $1-\frac{164}{180} \leq \frac{2}{n} \leq 1-\frac{163}{180}$ soit $\frac{360}{17} \leq n \leq \frac{360}{16}$. Donc $\boxed{n = 22}$.

Exercice 2

1. Solution : On réécrit le produit sous la forme suivante :

123 456 789 ×999 999 999 = 123 456 789 × (10^9 – 1) = 123 456 789 × 10^9 – 123 456 789

123 456 789 000 000 000 – 123 456 789 = 123 456 788 876 543 211. Il n'y a aucun chiffre 9 dans la réponse.

2. Solution : Posons N = 777 777 777 777 777^2 – 222 222 222 222 223^2. $N = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ avec x = 777 777 777 777 777 et y = 222 222 222 222 223. Or $x + y = 10^{15}$ et $x - y$ = 555 555 555 555 554 .
Donc $x^2 - y^2$ = 555 555 555 555 554 × 10^{15} et la somme de ses chiffes est égale à 14 × 5 + 4, ou 74.

3. Solution : Les six nombres possibles sont 10a + b, 10a + c, 10b + a, 10b + c, 10c + a, 10c + b.

Leur somme est 22(a + b + c). Les ensembles {a, b, c} possibles sont donc {6, 7, 9} et {5, 8, 9}.

Exercice 3

On choisit un nombre a différent de -1 , puis on a le choix entre :
- lui ajouter 1 ;
- faire le quotient de a par a + 1.

On recommence avec le nombre obtenu, et ainsi de suite.

1. En faisant le quotient de a par a + 1 , on a obtenu le nombre b. Exprimer a en fonction de b . Réponse : $a=\frac{b}{1-b}$

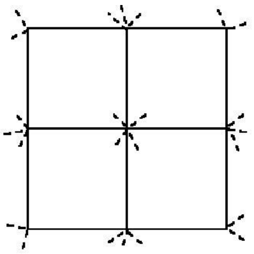
2. Partant du nombre 1, montrer qu'il possible d'obtenir $\frac{3102}{2013}$ au bout d'un certain nombre d'étapes.

Partant de 1, les nombres successifs obtenus soit en ajoutant 1 ou en effectuant le quotient du nombre initial a par a + 1, on obtient des nombres strictement positifs.

En remontant la chaîne arrivant à $\frac{3102}{2013}=\frac{94}{61}$, on constate qu'il y a deux sortes d'opérations possibles : Soustraire 1, la deuxième, calculer $\frac{b}{1-b}$. Les résultats obtenus étant strictement positifs, la première (A) ne s'applique qu'à des nombres plus grands que 1 et la deuxième (B) à des nombres strictement compris entre 0 et 1.

On obtient la chaîne suivante : $\frac{94}{61} \underset{A}{\mapsto} \frac{33}{61} \underset{B}{\mapsto} \frac{33}{28} \underset{A}{\mapsto} \frac{5}{28} \underset{B}{\mapsto} \frac{5}{23} \underset{B}{\mapsto} \frac{5}{18} \underset{B}{\mapsto} \frac{5}{13} \underset{B}{\mapsto} \frac{5}{8} \underset{B}{\mapsto} \frac{5}{3} \underset{A}{\mapsto} \frac{2}{3} \underset{B}{\mapsto} 1$

Exercice 4



Solution :

1. Nombre de morceaux de ficelle pour un carré $n \times n$: $2n(n + 1)$. Si n = 15, cela fait 30 × 16 = 480 morceaux de ficelle.

Nombre de bouts de ficelles à couper pour un carré $n \times n$:
Chacun des morceaux de ficelle crée deux bouts de ficelle à couper, ce qui fait $4n(n + 1)$ bouts de ficelle à couper.

Soit, pour un carré 15 × 15, 960 bouts de ficelle à couper.

2. On cherche tout d'abord le plus grand entier n tel que $2n(n + 1) \leq 2012$ soit $n(n + 1) \leq 1006$.

On peut remarquer que $n^2 < n(n + 1)$. Or, si $n^2 < 1006$, on a $n \leq 31$: 31 × 32 = 992 et 32 × 33 = 1056.

Donc n = 31. Pour réaliser un carré 31 × 31, il faut 2 × 31 × 32 = 1984 bouts de ficelles et il y aura 2 × 1984 = 3968 bouts de ficelle à couper.

Probabilités

Exercice 5

La représentation du problème peut se faire à l'aide d'un tableau, en reportant l'effectif total à 100.

	Salle A	Salle B	Total
Laveurs	$\frac{55}{100}\times 60 = 33$	$\frac{70}{100}\times 40 = 28$	
Testeurs	$\frac{15}{100}\times 60 = 9$	$18-9=9$	18
Managers	$\frac{30}{100}\times 60 = 18$	$40-\left(28+9\right)=3$	
Total	60	40	100

Pif a 18 % de chances d'être manager en choisissant la salle A alors qu'il n'en a que 3 % en choisissant la salle B.
Paf a la même chance d'être testeur (9 %) quelque soit la salle choisie.

Exercice 6

On se place dans la situation d'équiprobabilité (hasard). La probabilité d'obtenir le code correct est donc 1/nombre de codes possibles.
Pour dénombrer tous les cas possibles, on distingue d'abord 3 cas :

- Le départ se fait dans un angle (A, C, I ou G). Le nombre de codes au départ de ces quatre lettres étant le même, nous allons réduire le décompte en démarrant de A par exemple.

$1^{ère}$ position	$2^{ème}$ position	$3^{ème}$ position	$4^{ème}$ position	code
A	B	C	F	ABCF
		E	D	ABED
			F	ABEF
			H	ABEH
	D	E	B	ADEB
			F	ADEF
			H	ADEH
		G	H	ADGH

On obtient ainsi 8 codes commençant par l'angle A et il y en a autant au départ de C, G et I.
Soit au total 32 codes commençant dans un angle.

- Le départ se fait sur un milieu (B, D, F ou H). On décompte par exemple à partir de B.

$1^{ère}$ position	$2^{ème}$ position	$3^{ème}$ position	$4^{ème}$ position	code
B	A	D	G	BADG
			E	BADE
	C	F	E	BCFE
			I	BCFI
	E	D	A	BEDA
			G	BEDG
		F	C	BEFC
			I	BEFI
		H	I	BEHI
			G	BEHG

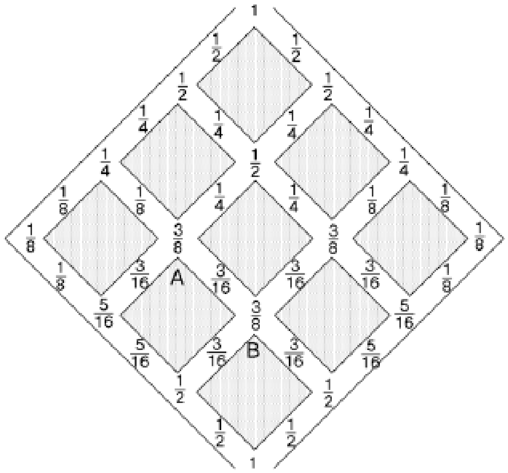
On obtient ainsi 10 codes commençant par l'angle A et il y en a autant au départ de D, F et H.
Soit au total 40 codes commençant sur un milieu.

- Le départ se fait sur le centre E

1ère position	2ème position	3ème position	4ème position	code
E	B	A	D	EBAD
		C	F	EBCF
	D	A	B	EDAB
		G	H	EDGH
	F	I	H	EFIH
		C	B	EFCB
	H	I	F	EHIF
		G	D	EHGD

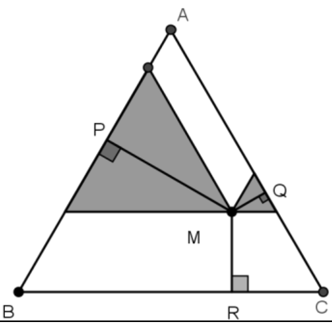
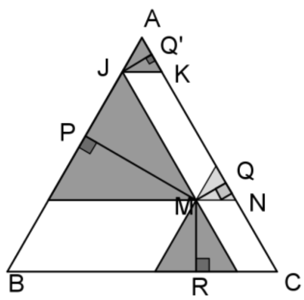
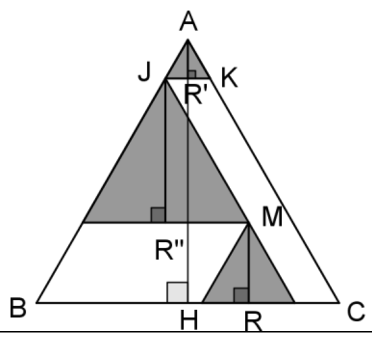
Exercice 7 *Mathématiques sans frontières 2011*

Les différents chemins que peuvent emprunter les billes avec la probabilité de passage sur chaque tronçon et à chaque carrefour sont indiqués ci-contre. La probabilité que la bille passe en A et celle que la bille passe en B sont toutes deux égales à $\frac{3}{8}$.

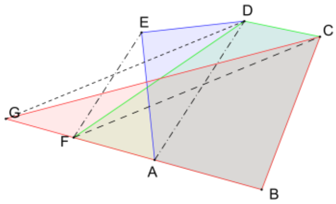


Géométrie

Exercice 1

		
Soit ABC un triangle équilatéral, M un point intérieur à ce triangle, et P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur chacun des côtés de ce triangle. Il s'agit de démontrer que la somme MP + MQ + MR est égale à la hauteur du triangle ABC.	Par construction, MNJJ est un parallélogramme, J $\in$ [AB] et K $\in$ [AC]. Le triangle AJK est équilatéral, de côté JK = MN. Il a pour hauteur JQ' = MQ.	JQ' = AR',= MQ, JR'' = MP d'où : MP + MQ + MR = AR' + JR''+ MR. De plus, les droites (JK), (MR'') et (BC) sont parallèles et toutes trois perpendiculaires à (AH). La distance de A à (BC) est donc égale à la somme des distances de A à (JK), de (JK) à (MR'') et de (MR) à (BC) d'où : MP + MQ + MR = AR' + JR''+ MR = AH.

Exercice 2



On considère un pentagone convexe ABCDE

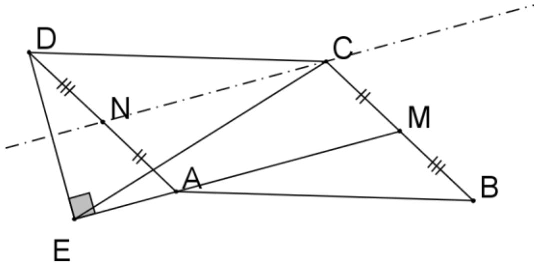
La parallèle à (AD) passant par E coupe (AB) en F.

1. aire (FBCD) = aire (FAD) + aire (ABCD). Or aire (FAD)) = aire (EAD) car (AD) // (FE). Donc aire (FBCD) = aire (EAD) + aire (ABCDE).

2. La parallèle à (FC) passant par D coupe (AB) en G. Alors : Aire (FGC) = aire (FDC) (car (GD) // (FC)) donc aire (BCG) = aire (FGC) + aire (FBC) = aire (FDC) + aire (FCB) = aire (FBCD) = aire (ABCDE).

Le triangle BCG a même aire que le pentagone ABCDE.

Exercice 3



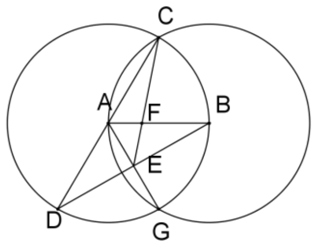
Soit ABCD un parallélogramme et M le milieu de [BC]. On désigne par E le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ADM et N le milieu du segment [AD].

AMCN est un parallélogramme (AN = MC et ((AN) // (MC))

donc (CN) // (AM) et comme (DE) ⊥ (AM), on en déduit que (CN) ⊥ (DE).

De plus, dans le triangle DEA, la droite (CN) qui est parallèle à (EA) et passe par le milieu du côté [AD] coupe [DE] en son milieu. (CN) est donc la médiatrice du segment [DE]. Donc CD = CE.

Exercice 4

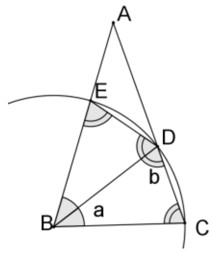


[DC] est un diamètre du cercle de centre A passant par B. donc (BD) ⊥ (BC).

(AG) est la médiatrice du segment [BD] (AB = AD et GD = GB) donc E est le milieu de [DB] et (AG) ⊥ (BD) et. On en déduit que (AE) //(BC) et AE = $\frac{1}{2}$BC.

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles AFE et FBC, on obtient AF = $\frac{1}{2}$FB d'où AF = $\frac{1}{3}$AB.

Exercice 5



1. Posons $a = \text{CBD}$ et $b = \text{BDC}$.

Les triangles BCD et BED étant symétriques par rapport à (BD), nous avons :

$a = \text{CBD} = \text{DBE}$ d'où $\text{ABC} = \text{EBC} = 2a$, $b = \text{BDC} = \text{BDE}$ et $\text{BCD} = \text{BED}$ = BED = 2a

Puisque le triangle ABC est isocèle en A, on en déduit que $\text{BCD} = \text{ABC} = 2a$. Donc b = 2a.

De plus BE = BD = BC donc $\text{BED} = \text{BDE} = \text{BDC} = \text{BCD} = 2a$.

On a donc (dans le triangle BCD par exemple) a + 2a + 2a = 180 d'où $\boxed{a = 36°}$.

2. $\text{AED} = 180° - 2a$ et $\text{ADE} = 180° - 2b = 180° - 4a$. Dans le triangle ABC, $\text{BAC} = 180° - 2\text{ABC} = 180° - 4a$.

On en déduit que $\text{EAD} = \text{EDA}$: Le triangle AED est isocèle en E.

Équations

Exercice 1

Soit m le nombre de 5 et y, z, t, u, v les nombres de 4, de 3 de 2, de 1 et de 0 dans l'écriture décimale de N.

D'après l'énoncé : 104 = 4 × 8 + 3× 7 + 2 × 6 + 5m + (4y + 3z + 2t + u d'où 4y + 3z + 2t + u = 39 – 5m.

Considérons les chiffres de 2N.

Exemple :

													Somme des chiffres
N	4	8	6	7	5	1	5	8	3	0	1	2	50
	×											2	
	8	6	2	4	0	2	0	6	6	0	2	4	40
retenues	+1	+1	+1	+1		+1	+1						+6
2N	9	7	3	5	0	3	1	6	6	0	2	4	46

Si r est un chiffre de N, la somme des chiffres des unités et des dizaines de r contribuent à la somme des chiffres de 2N.

Chaque 8 de l'écriture de *N* produit une somme de chiffres égale à 7 dans l'écriture de 2*N*.
Chaque chiffre 7 de l'écriture de *N* produit une somme de chiffres égale à 5 dans l'écriture de 2*N*.
Chaque chiffre 6 de l'écriture de *N* produit une somme de chiffres égale à 3 dans l'écriture de 2*N*.
Chaque chiffre 5 de l'écriture de *N* produit une somme de chiffres égale à 1 dans l'écriture de 2*N*.
Les chiffres 0, 1, 2, 3, 4 produisent 0,2, 4, 6 , 8. Donc la somme de ces chiffres figurant dans l'écriture de N est doublée dans l'écriture de 2*N*.
Puisque la somme des chiffres de 2N est 100, on a donc $100 = 4\times 7 + 3\times 5 + 2\times 3 + m\times 1 + 2(39-5m)$ d'où $127 - 9m = 100$.
D'où m = 3. Le chiffre 5 apparaît trois fois dans *N*.

Exercice 2 *d'après Jeux et Stratégies n°23*

Légion 1 : x^2 hommes et légion 2 : y^2 hommes. On a $\begin{cases} x = y+7 \\ x^2 - y^2 = 217 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x-y=7 \\ 7(x+y) = 217 \end{cases}$. Donc $\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=31 \end{cases}$.
On obtient : $x = 19$ et $y = 12$. Effectif de la légion 1 : 361 de la légion 2 : 144

Exercice 3

Soit a, b et c les trois nombres. D'après l'énoncé : $\begin{cases} a + \dfrac{b+c}{2} = 65 \\ b + \dfrac{c+a}{2} = 69 \\ c + \dfrac{a+b}{2} = 76 \end{cases}$ d'où, en multipliant par 2 les membres de chaque équation :
$\begin{cases} 2a+b+c = 130 \\ 2b+c+a = 138 \\ 2c+a+b = 152 \end{cases}$. En additionnant membre à membre, on obtient : $4a+4b+4c = 420$ d'où $a+b+c = 105$.

La moyenne des trois nombres est donc $\dfrac{a+b+c}{3} = 35$.

Exercice 4

Soit x le côté de la base carrée du pavé droit et h sa hauteur (x et h exprimés en cm). Le nombre de dés après découpage est égal à x^2h et le nombre de faces peintes en rouge à $2x^2 + 4\,xh$ soit $x(2x + 4h)$.

D'après l'énoncé, $x^2h = x(2x + 4h)$ d'où , en divisant les deux membres par x (qui n'est pas nul) : $xh = 2x + 4h$

On en déduit que $h = \dfrac{2x}{x-4} = \dfrac{(2x-8)+8}{x-4} = 2 + \dfrac{8}{x-4}$. Comme h est un nombre entier, 8 doit être divisible par $x-4$.

Ce qui donne quatre solutions : $x = 5$ et $h = 10$, $x = 6$ et $h = 6$, $x = 8$ et $h = 4$, $x = 12$ et $h = 3$.

Exercice 5 *Olympiade mathématique belge*

Notons les chiffres de leurs âges a et b, avec a plus grand que b. Johan a donc $10a+b$ ans, tandis que Fabrice a $10b+a$ ans. La différence de leurs carrés vaut donc $(10a+b)^2 - (10b+a)^2$ soit :
$99(a+b)(a-b)$. Puisque ce nombre doit être un carré parfait, et que dans 99 il y a un seul facteur premier 11, on sait que $(a+b)(a-b)$ doit être multiple de 11. Mais a et b sont des chiffres, donc seul $(a+b)$ peut être multiple de 11, et il vaut 11.
En le remplaçant, on obtient que $33^2(a-b)$ doit être un carré parfait, et puisque 33^2 est déjà un carré parfait, $(a-b)$ doit également être un carré parfait. C'est la différence de deux chiffres, on n'a donc que les choix 1, 4, et 9. Ces deux derniers ne sont pas possibles car ils ne donneraient pas des chiffres comme solutions.
La seule solution est donc $(a-b) = 1$, soit $a = 6$ et $b = 5$.
Par conséquent, Johan a 65 ans et Fabrice a 56 ans.

Exercice 6 *Olympiade mathématique belge*

1. Le périmètre vaut : 29 + 29 + 40 soit 98.

   L'aire vaut : $\dfrac{B\times h}{2} = \dfrac{40\times 21}{2} = 420$ (On trouve la hauteur 21 en appliquant le théorème de Pythagore)

2. On note *x*, *x* et *z* les longueurs des côtés du triangle et on cherche donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y+z=98 \\ \dfrac{z\times\sqrt{x^2-\left(\dfrac{z}{2}\right)^2}}{2}=420 \end{cases}$$. Ce système s'écrit aussi : $$\begin{cases} x=\dfrac{98-z}{2} \\ z\times\sqrt{49-z}=120 \end{cases}$$.

On suppose que *z* est un diviseur de 120, donc on cherche les diviseurs de 120.
div 120 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120}.
On essaie d'attribuer à *z* chaque valeur étant un diviseur de 120 et, ce faisant, on trouve que *z* = 24 ou *z* = 40 (celui là étant la solution du triangle de l'énoncé).
Il existe donc un autre triangle dont les mesures diffèrent de 29, 29 et 40 mais possédant le même périmètre et la même aire que celui -ci. Ses côtés valent respectivement 37, 37 et 24.

Exercice 7 *Olympiade mathématique belge*

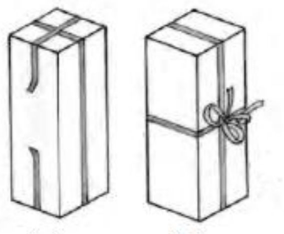
1. $(2,3,7)$ est une solution.

2. Si les trois nombres sont impairs, $pq+qr+rp+1$ est un nombre pair alors que pqr est un nombre impair. L'un des trois nombres, *p* par exemple, est donc pair et le seul nombre premier pair est 2.

On est donc ramené à résoudre $2q+qr+2r+1=2qr$ soit $q=\dfrac{2r+1}{r-2}$ ou encore $q=2+\dfrac{5}{r-2}$. La seule possibilité pour que *q* et *r* soient des entiers est $r=7$ et $q=3$.

Géométrie et calcul

Exercice 1 *Mathématiques sans frontières 2011*

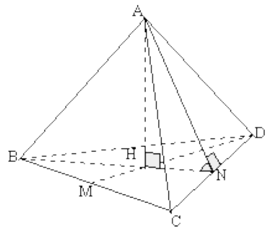

(a) (b)

Soit *x* le coté de la base carrée du paquet. Soit *y* sa hauteur. Ces deux dimensions étant exprimées en centimètres.

Le problème se ramène au système d'équations suivant : $\begin{cases} 4x+4y-10=150 \\ 6x+2y+30=150 \end{cases}$

La résolution donne : *x* = 10 et *y* = 30.
Le volume du paquet est *V* = 10×10×30 = 3 000 cm^3.

Exercice 2



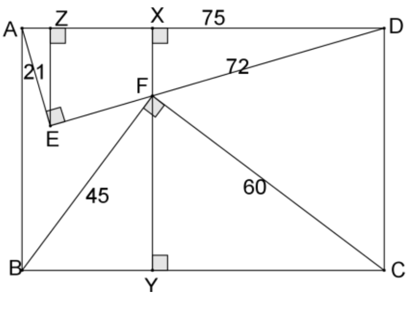
Le problème se ramène au calcul de l'arête *a* d'un tétraèdre régulier ABCD de hauteur 200.

Dans le triangle AHD rectangle en H (voir figure) : AD^2 = AH^2 + HD^2 soit : $a^2 = 200^2 + HD^2$

H est le centre du triangle équilatéral BCD. Donc $\mathrm{HD}=\dfrac{2}{3}\mathrm{DM}$. DM est la hauteur du triangle BCD de côté a. Donc $\mathrm{DM}=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $\mathrm{HD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ d'où $a^2 = 200^2 + \dfrac{1}{3}a^2$ et a = 10 $\sqrt{3}$.

La distance entre deux avions est donc égale à 10 $\sqrt{3}$ m soit 173 m, à 1 m près.

Exercice 3



AD^2 = AE^2 + ED^2 et FC^2 = BC^2 – BF^2. On en déduit successivement que AD = BC = 75 et que FC = 60.
Notons X et Y les projetés orthogonaux de F sur (AD) et (BC).

Calcul de FY :

[FY] est la hauteur issue de F dans le triangle rectangle FBC.

2 × aire (FBC) = 45 × 60 = BC × FY d'où $\mathrm{FY}=\dfrac{45\times 60}{75}=36$.

Calcul de FX :

Soit Z le projeté orthogonal de E sur (AD). [EZ] est la hauteur issue de E dans le triangle AED, rectangle en E.

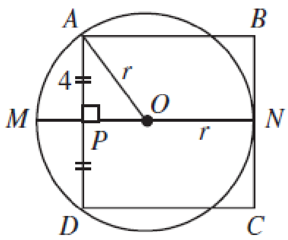
$2 \times$ aire (AED) = 21×72 = AD × EZ d'où $EZ = \frac{21 \times 72}{75} = \frac{504}{25}$.

D'autre part, dans le triangle EZD, rectangle en Z, $ZD^2 = ED^2 - EZ^2 = 72^2 - \left(\frac{504}{25}\right)^2$.

D'où $ZD = \sqrt{72^2 - \left(\frac{504}{25}\right)^2} = \frac{1}{25}\sqrt{72^2 \times 25^2 - 504^2} = \frac{1728}{25}$.

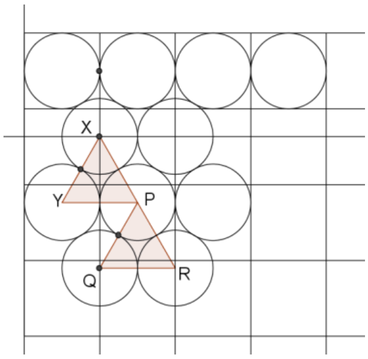
En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle EZD où (ZE) // (XF), on obtient : $\frac{XF}{ZE} = \frac{XD}{ZD}$, soit $XF = ZE \times \frac{XD}{ZD} = \frac{504}{25} \times \frac{48}{\frac{1728}{25}}$. On a donc XF = 14 et AB = YX = YF + FX = 50.

Exercice 4



Soit r le rayon du cercle et O son centre. Soit [MN] le diamètre qui coupe le côté [AD] perpendiculairement en son milieu P.
Puisque P est le milieu de [AD], on a AP = 4 et, puisque $ON = r$, alors : $PO = PN - ON = 8 - r$.
Le triangle APO est rectangle. D'après le théorème de Pythagore : $r^2 = 4^2 + (8 - r)^2$. On en déduit que :
$16r = 80$ donc $r = 5$. Le cercle a donc un rayon de 5.

Exercice 5



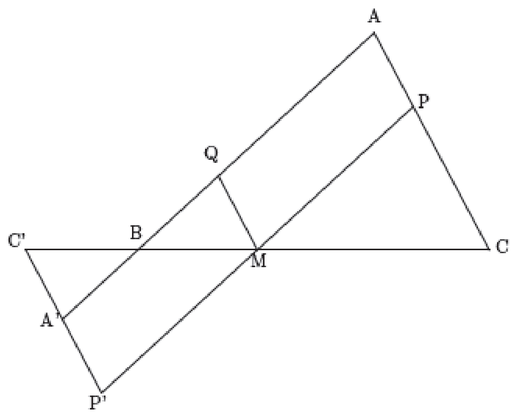
Partant de la disposition dans laquelle il y a 100 disques par rangée, on retire un disque, une rangée sur deux et on déplace les rangées dans lesquelles on a retiré un disque de telle sorte que trois cercles tangents l'un à l'autre, quels qu'ils soient, forment un triangle équilatéral.
Puisque chaque disque a un diamètre de 1, les triangles PQR et PXY sont équilatéraux avec des côtés de longueur 1 et de hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}$

La hauteur totale de ces n rangées est égale à $2 \times \frac{1}{2} + (n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On cherche donc le plus grand entier n tel que $1 + (n-1)\frac{\sqrt{3}}{2} \leq 100$ soit $n \leq \frac{2 \times 99}{\sqrt{3}} + 1$. D'où $n = 115$.

Puisqu'on peut disposer un nombre impair de rangées, il est plus avantageux d'enlever un disque sur les rangées de rangs pairs pour obtenir la disposition étudiée.
Dans ces conditions, on obtient 58 rangées de rangs impairs et 57 rangées de rangs pairs. La deuxième configuration permet donc de placer $58 \times 100 + 57 \times 99 = 11\,443$ disques soit 1 443 disques supplémentaires.

Exercice 6 *Rallye Franche-Comté 2011*



Soit C' le symétrique de C par rapport à M, P' le symétrique de P par rapport à M et A' le symétrique de A par rapport à Q. Deux triangles symétriques par rapport à un point ont la même aire.
Ainsi, l'aire du triangle PMC est égale à l'aire du triangle P'MC'.
On a : aire(APMQ) + aire(BQM) + aire(PCM) = aire(ABC).
De plus aire(APMQ) = aire(A'QMP')
d'où aire(A'QMP') + aire(C'A'B) = aire(BQM) + aire(PCM)
soit 2_aire(APMQ) + aire(C'A'B) = aire(ABC).
L'aire de APMQ est maximale lorsque l'aire de C'A'B est nulle c'est-à-dire lorsque C'est confondu avec B, c'est-à-dire lorsque M est au milieu de [BC].

Raisonnements

Exercice 1 *Mathématiques sans frontières 2011*

On commence simultanément par les agarics, les chenilles et les épines. Au bout de 4 jours on rajoute les bolets, au bout de 8 jours, les dattes. Il faudra donc 13 jours au minimum pour préparer la potion magique.

Exercice 2

1	2	3	4	5
(1, 3, 4)	(3, 4, 5)	(1, 2, 4)	(1, 2, 5)	(2, 3, 5)

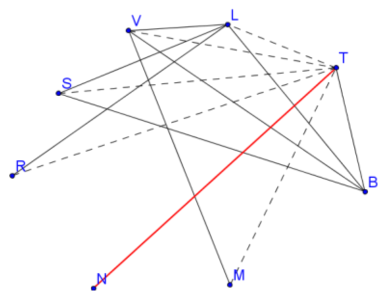
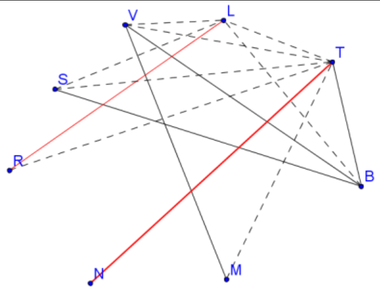
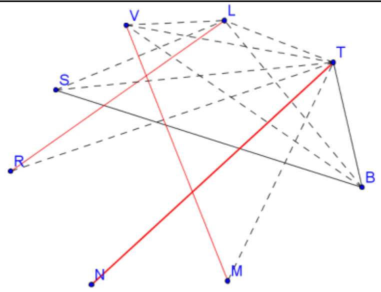
Chaque ampoule apparaît au total 3 fois. En appuyant une fois sur chaque interrupteur, toutes les ampoules seront allumées. Cela fait donc 5 manœuvres.

Peut-on faire mieux ?
en N manœuvres, on opère $3N$ changements d'états.
Si on veut que les cinq ampoules soient allumées, il faut $5 \times (2p + 1)$ changements d'états. 5 est impossible à obtenir avec $3N$, donc le nombre minimum de changements d'états est 15, obtenu avec 5 manœuvres. On ne peut donc faire mieux.

Exercice 3

Il y a huit équipes BASTIA (B), MARSEILLE (M), NANTES (N), REIMS (R), SAINT-ETIENNE (S), VALENCIENNES (V), LYON (L) et TROYES (T).

Les équipes sélectionnées par chacun des journalistes ne peuvent pas s'être rencontrées. La figure 1 représente les matchs possibles compte-tenu des pronostics (les équipes pouvant se rencontrer sont reliées par un segment).

		
NANTES a rencontré TROYES. On en déduit les rencontres impossibles contre TROYES (en pointillés).	REIMS a rencontré LYON. On en déduit les rencontres impossibles contre LYON (en pointillés).	MARSEILLE a donc rencontré VALENCIENNES et, par suite, BASTIA a rencontré SAINT-ETIENNE.

Exercice 4

Si le produit de ces neufs nombres soit impair, Cela suppose que toutes les différences sont des nombres impairs. Or, la différence a – b est un nombre impair si et seulement si a est impair (I) et b pair (P) ou a est pair et b impair.
Ce qui donne le tableau suivant :

a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
b	**P**	**I**	**P**	**I**	**P**	**I**	**P**	**I**	**P**

Ce tableau fait apparaître dans la deuxième ligne 5 nombres pairs et 4 nombres impairs. C'est impossible puisque les 9 nombres sont tous distincts et qu'entre 1 et 9, il y a 5 nombres impairs et 4 nombres pairs.
Le produit des 9 nombres est donc toujours pair.

Exercice 5 *Rallye Franche-Comté 2010*

Soit n le nombre de gares avant l'entrée en service du nouveau secteur autoroutier.

a. Pour chacune de ces n gares choisies comme entrées, il y a $(n-1)$ gares possibles de sorties d'où $n(n-1)$ reçus différents au total avant la mise en service du nouveau secteur. On peut remarquer qu'avec ce raisonnement chacune des n gares a été choisies comme entrée et aussi comme sortie.

b. Avec le même raisonnement dans le cas où le nouveau secteur est mis en service, c'est-à-dire lorsqu'il y a $n+4$ gares, on obtient : ($(n+4)(n+3)$ reçus différents au total.

c. Le nombre total de nouveaux reçus possibles est donc : $(n+4)(n+3)-n(n-1)$ soit $n^2+7n+12-n^2+n$ c'est à dire : $8n+12$.

d. L'énoncé nous indique que $8n+12$ vaut 164 donc $8n$ vaut 152 et n vaut 19. Le nombre de gares avant l'entrée en service du nouveau secteur est donc 19, le nouveau nombre de gares est donc 23 et, avec le même raisonnement que les précédents, le nouveau nombre total de reçus
possibles est $23 \times 22 = 506$.

Conclusion : Le nombre total de reçus possibles est de 506.