MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Stage « résolution de problème » proposé à des collégiens talentueux et motivés désignés par leurs établissements, les 29 et 30 octobre 2012

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 7 ans, et bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Cinq niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première et les lauréats des olympiades de première 2012 en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en mars et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, depuis 2011 le lycée Camille Pissarro de Pontoise et cette année le collège Paul Fort de Montlhéry. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette. Bien qu'elle les ait précédés, son action s'inscrit dans le Plan sciences ministériel et singulièrement dans le projet MathC2+.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Marie-Françoise BOURDEAU, Véronique MESSÉANT, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

Les responsables des établissements d'accueil : Dominique BARTH (Directeur de l'UFR des sciences de l'UVSQ), Florence GOEHRS (Responsable administrative de l'UVSQ), Jean-Paul JOUAN (Proviseur du lycée Camille Pissarro), Didier TACHEAU (Principal du collège Paul Fort)

Les professeurs : Fabienne AUDINOT (Lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Isabelle BOIS (Collège Michel Vignaud, MORANGIS), Pierre BORNSZTEIN (Lycée Kastler, CERGY), Fabrice CHARLEMAGNE (Lycée Robert Doisneau, CORBEIL ESSONNES), Antoine CROUZET (Lycée Camille Saint-Saëns, DEUIL LA BARRE), Odile DELASSUS (Lycée Paul-Émile Victor, OSNY), Muriel DUGAST (Collège Le Parc, SAINT OUEN L'AUMÔNE), Yann ÉGLY (Lycée Michelet, VANVES), Nicolas FIXOT (Collège Robert Doisneau, GONESSE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Carine LILETTE (Lycée Maurice Genevoix, MONTROUGE), Jérôme MORAND (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Christine WEILL (Lycée Hoche, VERSAILLES), Karim ZAYANA (Lycée Hoche, VERSAILLES), Martine ZNATY (Collège Les Hauts Grillets, SAINT GERMAIN EN LAYE)

Emploi du temps

Pontoise	Groupe P1	Groupe P2
Lundi 29 10 heures	**Calculer, dénombrer KR+MD**	**Géométrie CH+BB**
Lundi 29 13 heures	**Pavages PB**	**Calculer, dénombrer KR+MD**
Lundi 29 15 heures	**Géométrie CH+BB**	**Pavages PB**
Mardi 30 10 heures	**Géométrie et calculs OD+BB**	**Équations CH+JM**
Mardi 30 13 heures	**Équations CH+JM**	**Cryptographie AC**
Mardi 30 15 heures	**Cryptographie AC**	**Géométrie et calculs OD+BB**

Versailles	Groupe V1	Groupe V2	Groupe V3
Lundi 29 10 heures	**Calculer, dénombrer KZ**	**Géométrie CL**	**Cryptographie MS**
Lundi 29 13 heures	**Cryptographie MS**	**Calculer, dénombrer KZ**	**Géométrie CL**
Lundi 29 15 heures	**Géométrie CL**	**Cryptographie MS**	**Calculer, dénombrer YE**
Mardi 30 10 heures	**Probabilités, Raisonnement CW**	**Équations MZ**	**Géométrie et calculs YE**
Mardi 30 13 heures	**Équations MZ**	**Géométrie et calculs YE**	**Probabilités, Raisonnement CW**
Mardi 30 15 heures	**Géométrie et calculs YE**	**Probabilités, Raisonnement CW**	**Équations MZ**

Montlhéry	
Lundi 29 10 heures	**Calculer, dénombrer NF**
Lundi 29 13 heures	**Géométrie FC**
Lundi 29 15 heures	**Cryptographie FA**
Mardi 30 10 heures	**Équations IB**
Mardi 30 13 heures	**Géométrie et calculs PM**
Mardi 30 15 heures	**Probabilités, Raisonnement FC**

Calculer, dénombrer

Exercice 1

Les angles internes d'un polygone régulier convexe mesurent entre 163° et 164 °. Combien ce polygone a-t-il de côtés ?

Exercice 2

1. On effectue le produit des nombres 123 456 789 et 999 999 999. Combien le nombre obtenu contient-il de 9 ?

2. Quelle est la somme des chiffres de l'entier égal à $777\,777\,777\,777\,777^2 - 222\,222\,222\,222\,223^2$?

3. Étant donnés trois chiffres distincts a, b, c, il est possible, en choisissant deux chiffres à la fois, de former 6 nombres de deux chiffres. Déterminer tous les ensembles $\{a, b, c\}$ pour lesquels la somme des six nombres de deux chiffres est égale à 484.

Exercice 3

On choisit un nombre a différent de -1, puis on a le choix entre :

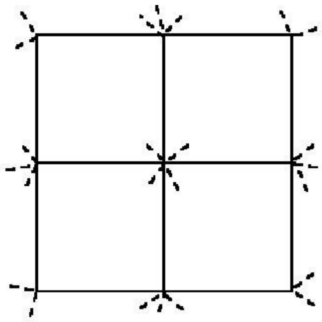
- lui ajouter 1 ;
- faire le quotient de a par $a + 1$.

On recommence avec le nombre obtenu, et ainsi de suite.

1. En faisant le quotient de a par $a + 1$, on a obtenu le nombre b. Exprimer a en fonction de b.

2. Partant du nombre 1, montrer qu'il est possible d'obtenir $\frac{3102}{2013}$ au bout d'un certain nombre d'étapes.

Exercice 4



Manon possède 2012 morceaux de ficelle, tous de même longueur. Elle les noue l'un à l'autre afin de réaliser un grand filet carré à mailles carrées, chaque morceau de ficelle devient un côté d'une maille. Ci-contre est représenté un petit filet 2 × 2. A chaque nœud, dépassent 2, 3 ou 4 bouts de ficelle (dessinés en pointillés). Il lui faudra couper ces bouts de ficelle.

1. Si elle réalise un grand filet 15 × 15
   - Combien de morceaux de ficelle devra-t-elle utiliser ?
   - Combien de bouts de ficelle qui dépassent devra-t-elle couper ?

2. Si elle réalise le plus grand filet carré possible avec ses 2012 morceaux de ficelle, combien de bouts de ficelle qui dépassent devra-t-elle couper ?

Probabilités

Exercice 1 *Rallye Franche-Comté 2010*

Une entreprise organise une journée d'embauche. Trois catégories de postes sont à pourvoir :

– Manager d'équipe

– Testeur de jeux vidéo

– Laveur de carreaux

A leur arrivée, les candidats choisissent d'entrer dans une salle : la salle A ou la salle B.

60 % des candidats optent pour la salle A et, parmi eux, 15 % seront « testeurs ».

En tout, l'entreprise n'a besoin que de 18 % de « testeurs ».

L'entreprise dont les bâtiments sont en grande partie vitrés, a besoin de beaucoup de laveurs de carreaux. 55 % des candidats de la salle A et 70 % des candidats de la salle B seront « laveurs de carreaux ».

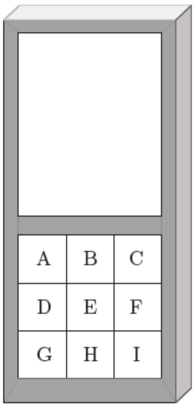
Pif et Paf se présentent comme candidats.

Paf, voulant être « testeur », quelle salle doit-il choisir pour se donner le maximum de chance ?

Pif, voulant être « manager », quelle salle doit-il choisir pour se donner le maximum de chance ?

Exercice 2 *Rallye Franche-Comté 2011*

Héloïse a reçu un téléphone portable dernier cri pour son anniversaire. Excitée par ce cadeau, elle ne prend pas le temps de consulter la notice et par inadvertance, verrouille le clavier avec un code qu'elle n'a pas pris le temps de mémoriser ni même de noter.



L'écran de son portable affiche dorénavant neuf cases comme l'indique le schéma ci-contre :

Le code est formé d'un trajet reliant 4 cases différentes.

Il suffit de laisser glisser son doigt d'une case à une case voisine horizontalement ou verticalement.

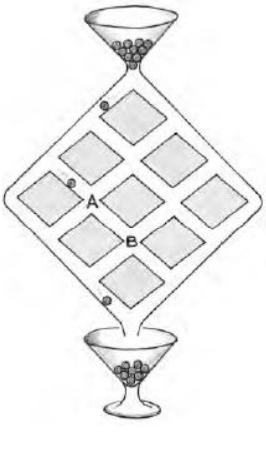
On précise que le même trajet dans le sens inverse est un code différent.

Exemple : ADEH n'est pas le même code que HEDA.

Le gâteau d'anniversaire à peine avalé, tous les convives se croient assez chanceux pour retrouver par hasard le code qui déverrouillera le téléphone.

Quelle est la probabilité de trouver le bon code du premier coup ?

Exercice 3 *Mathématiques sans frontières 2011*



Dans le jeu ci-contre, une bille quittant le réservoir ne peut que descendre.

Quand une bille arrive à un carrefour où un choix s'offre à elle, elle a autant de chance d'aller d'un côté que de l'autre.

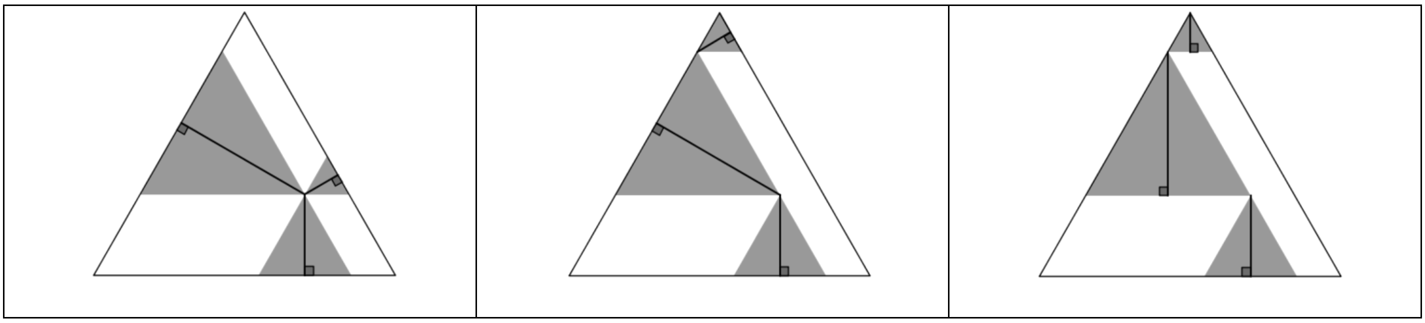
Lorsqu'une bille quitte le réservoir, quelle est la probabilité qu'elle passe par le carrefour A ?

Et quelle est la probabilité qu'elle passe par le carrefour B ?

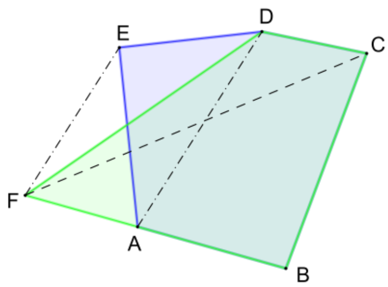
Géométrie

Exercice 1

Au XVIIe siècle, un élève de Galilée, Vincenzo Viviani, a démontré un théorème de géométrie qui porte aujourd'hui son nom : Dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point intérieur au triangle aux trois côtés est égale à la hauteur du triangle.
Démontrer ce théorème en observant les trois figures ci-dessous



Exercice 2



On considère un pentagone convexe ABCDE

La parallèle à (AD) passant par E coupe (AB) en F.

1. Démontrer que le quadrilatère FBCD a la même aire que le pentagone ABCDE.

2. Construire un triangle de même aire que le pentagone ABCDE.

Exercice 3

Soit ABCD un parallélogramme et M le milieu de [BC]. On désigne par E le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ADM. Démontrer que CD = CE.

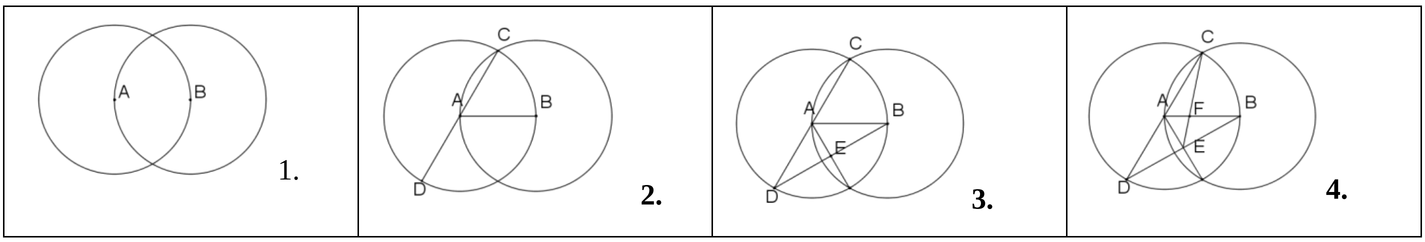
Indication : On pourra tracer la droite (CN) où N est le milieu du segment [AD].

Exercice 4

Les quatre figures ci-dessous retracent le film de la construction du point F appartenant au segment [AB] tel que $AF = \frac{1}{3}AB$. Justifier cette construction.

Remarque : On a commencé par tracer deux cercles de centres respectifs A et B et de rayon AB.

Les points nommés qui semblent alignés le sont et ceux qui semblent être sur l'un ou l'autre des deux cercles, le sont également.



Exercice 5

On considère un triangle ABC isocèle en A dont tous les angles sont aigus. Le cercle de centre B et de rayon BC coupe [AC] en D et [AB] en E. On suppose de plus, que les triangles BCD et BED sont symétriques par rapport à (BD):

1. Quelle est la mesure de l'angle BAC ?

2. Prouver que le triangle AED est isocèle.

Équations

Exercice 1

Soit N un entier naturel. Son écriture dans le système décimal ne comprend aucun 9, mais comprend exactement quatre 8, trois 7, deux 6 et d'autres chiffres.
Sachant que la somme des chiffres de N est égale à 104 et que la somme des chiffres de $2N$ est égale à 100, combien de fois le chiffre 5 figure-t-il dans N ?

Exercice 2 *d'après Jeux et Stratégies n°23*

C'était en l'an 78 avant Jésus-Christ. Deux capitaines de César ont disposé les hommes de leur légion en deux carrés parfaits pour les faire défiler sur le forum. Les effectifs de ces deux légions diffèrent de 217 hommes. La plus nombreuse a sept rangées de soldats de plus que l'autre.
Quel est l'effectif de chacune des deux légions ?

Exercice 3

On choisit trois nombres de telle sorte que si l'on additionne tour à tour un des nombres à la moyenne des deux autres, on obtient 65, 69 et 76. Quelle est la moyenne des trois nombres choisis ?

Exercice 4

Après avoir peint en rouge un pavé droit en bois à section carrée (ses dimensions sont des nombres entiers de cm), on le découpe en dés d'arête 1 cm. On s'aperçoit alors qu'il y a autant de dés que de faces de dés peintes en rouge. Quelles sont les dimensions de ce pavé ?

Exercice 5 *Olympiade mathématique belge*

Johan, plus âgé que Fabrice, remarque qu'en permutant les deux chiffres de son âge, il obtient celui de Fabrice. Ce dernier, quant à lui, observe que la différence entre les carrés de leurs âges est le carré d'un naturel non nul. Quels sont leurs âges respectifs ?

Exercice 6 *Olympiade mathématique belge*

Les longueurs des trois côtés d'un triangle isocèle sont respectivement 29, 29 et 40.

1. Calculer son périmètre et son aire.

2. Existe-t-il un triangle isocèle ayant même périmètre et même aire, bien que les longueurs de ses côtés soient des entiers différents des longueurs du triangle précédent ? Si oui, donner tous les triangles isocèles qui conviennent.

Exercice 7 *Olympiade mathématique belge*

Soit l'équation $pq+qr+rp+1=pqr$ d'inconnues p,q,r qui sont des nombres premiers.

1. En donner une solution.

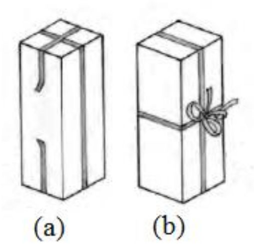
2. Donner toutes ses solutions (on pourra commencer par montrer que l'un des entiers est 2).

Géométrie et calcul

Exercice 1 *Mathématiques sans frontières 2011*

Mon paquet cadeau est un pavé droit de base carrée.
Je souhaite le décorer d'un ruban de 1,50 m de long.
Si j'entoure le paquet selon la disposition (a), il me manque 10 cm pour joindre les deux bouts du ruban. Heureusement avec la disposition (b) il me reste 30 cm de ruban pour faire un nœud.

Quel est le volume de mon paquet ?



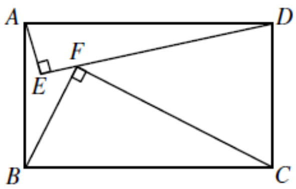
Exercice 2

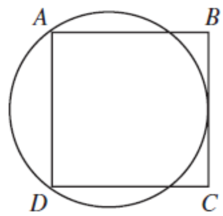
Lors d'un meeting aérien, quatre avions volent en formation. Chaque avion est à égale distance des trois autres. Leur altitude est alors de 800 m pour trois d'entre eux et de 1 000 m pour le quatrième.

Calculer la distance qui sépare deux avions

Exercice 3

Soit ABCD un rectangle. A l'intérieur de ce rectangle, on construit deux triangles rectangles AED et BFC tels que le point F soit situé sur le segment [DE].
Sachant que AE = 21, ED = 72 et BF = 45, quelle est la longueur du côté [AB] ?





Exercice 4

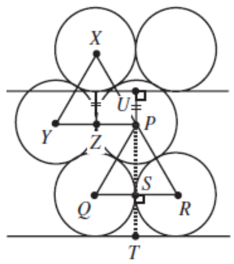
Chaque côté d'un carré ABCD a une longueur de 8. On trace un cercle, passant par les points A et D et tangent au côté [BC] . Quel est le rayon du cercle?

Exercice 5

On veut placer 10 000 disques ayant chacun un diamètre de 1, dans un carré de côté 100.

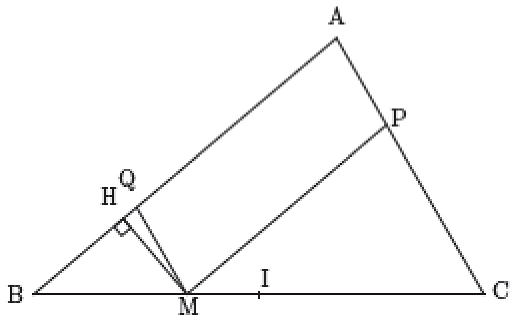
On peut le faire en plaçant les disques en 100 rangées de 100. Si on place plutôt les disques de telle façon que les centres de n'importe quels trois disques tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral (voir figure).

Combien de disques peut-on rajouter au maximum ?



Exercice 6 *Rallye Franche-Comté 2011*

Au fond d'un camping, il reste une pointe de terrain inoccupée et les propriétaires décident d'y installer une piscine ayant la forme d'un parallélogramme. Pour cela, ils commencent par dessiner la configuration souhaitée comme ci-contre :



- Le terrain triangulaire est représenté par ABC ;
- Le parallélogramme APMQ représentant la piscine est tel que M et Q soient respectivement sur [BC] et [AB].

Déterminer la position de M telle que l'aire de la piscine soit maximale.

Raisonnements

Exercice 1 *Mathématiques sans frontières 2011*

Pour fabriquer de la potion magique, il faut :

un chaudron, de l'eau de source et les ingrédients suivants:

- 2 agarics, 6 bolets, 4 chenilles de vanesse,
- 5 dattes d'Égypte et 3 épines d'ajonc coupées à la serpe d'or.

Remplir le chaudron d'eau, puis faire macérer ces ingrédients en respectant les règles suivantes:

- Les bolets doivent macérer au moins 7 jours.
- Les dattes doivent macérer au moins 8 jours.
- Les épines doivent macérer au moins 12 jours.
- Les chenilles doivent avoir macéré au moins 8 jours avant que l'on fasse macérer les dattes.
- Les agarics doivent avoir macéré au moins 4 jours avant que l'on fasse macérer les bolets.
- Plusieurs ingrédients peuvent macérer en même temps.

Comment le druide doit-il opérer pour fabriquer la potion magique en un temps minimum ?

Exercice 2

Vous devez allumer toutes les ampoules en utilisant les 5 interrupteurs ci-contre. Quand on utilise un interrupteur, toutes les ampoules éteintes correspondantes s'allument, et toutes les ampoules allumées correspondantes s'éteignent. Initialement, toutes les ampoules sont éteintes.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
(1, 3, 4)	(3, 4, 5)	(1, 2, 4)	(1, 2, 5)	(2, 3, 5)

Exemple : l'interrupteur 1 actionne les ampoules 1, 3, et 4.

Chaque ampoule apparaît au total 3 fois. En appuyant une fois sur chaque interrupteur, toutes les ampoules seront allumées. Cela fait donc 5 manœuvres. Peut-on faire mieux ?

Exercice 3

Ce soir ont lieu quatre rencontres de football. Il a été demandé à trois journalistes sportifs Thierry, Gérard et Pierre d'établir un pronostic. Voici les quatre équipes désignées par chacun d'eux comme devant remporter la victoire:

Thierry BASTIA; MARSEILLE; NANTES; REIMS;

Gérard NANTES; REIMS; SAINT-ETIENNE; VALENCIENNES

Pierre LYON, MARSEILLE; NANTES; SAINT-ETIENNE

Aucun d'eux n'a envisagé la victoire de TROYES.

Pouvez-vous, avec ces données, dire quelles sont les équipes qui se rencontrent dans chacun des quatre matchs ?

Exercice 4

Dans la deuxième ligne du tableau ci-dessous, Florian écrit tous les nombres entre 1 et 9 dans un ordre quelconque puis calcule les 9 écarts obtenus, colonne par colonne. Il affirme que le produit de ces neufs nombres est toujours pair. A-t-il raison ?

a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
b									
a – b									

Exercice 5 *Rallye Franche-Comté 2010*

Lorsqu'un automobiliste emprunte une des autoroutes d'une société, une machine lui délivre un ticket qui lui indique la gare d'entrée.

A la gare de sortie, l'automobiliste règle le péage et obtient un reçu comportant le tarif, l a gare d'entrée et celle de sortie du réseau.

Ce mois-ci, un nouveau secteur autoroutier est entré en service, de sorte que le nombre de gares a augmenté de 4 et que le nombre de reçus possibles a augmenté de 164.

Déterminez le nouveau nombre total de reçus possibles pour un automobiliste acquittant un péage sur l'autoroute.