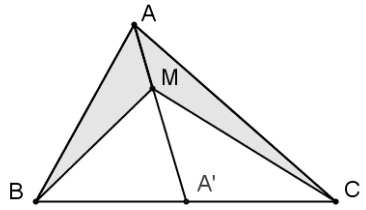
Pépinière de mathématiques – 20 et 21 octobre 2014

Eléments de correction

Géométrie du triangle

1. Médianes d'un triangle

a. Soit ABC un triangle, A' le milieu du segment [BC] et M un point intérieur au triangle ABC.

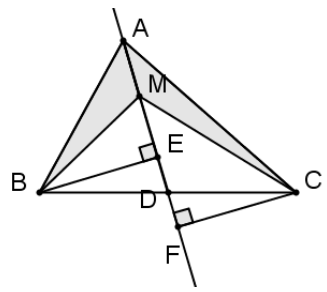


Démontrons que si M est un point intérieur au triangle ABC, appartenant à la médiane (AA'), alors les triangles MBA et MCA ont la même aire.
Soit M' le pied de la hauteur issue de M dans le triangle BMA'. [MM'] est également le pied de la hauteur issue de M dans le triangle A'MC. On en déduit que les triangles BMA' et A'MC ont la même aire.

On démontre de même que les aires des triangles ABA' et AA'C sont égales. On en déduit que :

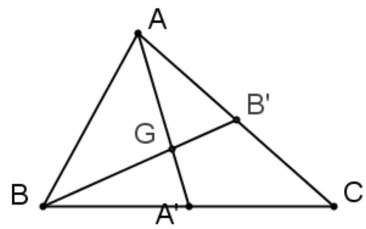
Aire (AMB) = aire (ABA') – aire (BMA')
= aire AA'C) – aire A'MC)
= aire (MCA).

Réciproquement



Soit M un point intérieur au triangle ABC. **On suppose que** les triangles MBA et MCA ont même aire. Il s'agit de démontrer que M appartient à la médiane [AA'].
Soit D le point d'intersection des droites (MA) et (BC).
On veut démontrer que D et A' sont confondus.
Appelons E et F les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C dans les triangles MBA et MCA.
Puisque les aires des triangles MBA et MCA sont égales, on a :
MA × BE = MA × CF d'où BE = CF. D'où :2 × aire(MBD) = BE × MD. Or BE = CF, donc :
2 × aire (MBD) = CF × MD = 2 × aire (MDC).
En conséquence : aire(MBD) = aire (MDC).
Or, la hauteur issue de M du triangle MBD est aussi la hauteur issue de M du triangle MCD. Soit h sa mesure.
On a :2 ×aire (MBD) = h × BD et 2 × aire (MCD) = h × DC. D'où : BD = CD.

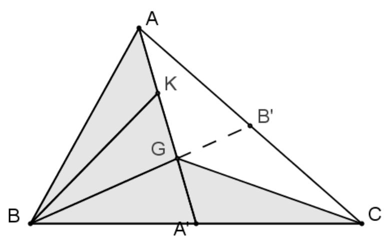
b. Soit A' et B' les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC] d'un triangle ABC et G le point d'intersection des droites (BB') et (AA'). **Il s'agit de démontrer que G appartient à la médiane issue de C du triangle ABC.**



Comme (AG) est la médiane issue de A dans le triangle ABC, on a :

Aire (GAC) = aire (GAB).
Comme (BG) est la médiane issue de B, on a : aire (GAB) = aire (GCB).
On en déduit que aire (GAC) = aire (GCB). G est donc un point de la médiane issue de C dans le triangle ABC.
Conclusion Les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en G.

c. Soit A' et B' les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC] d'un triangle ABC et G le centre de gravité de ce triangle.

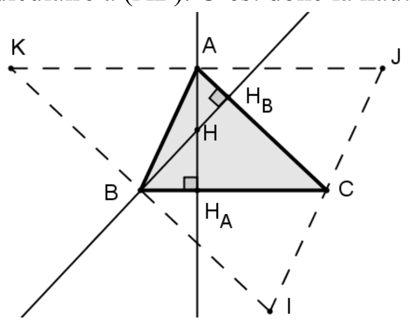


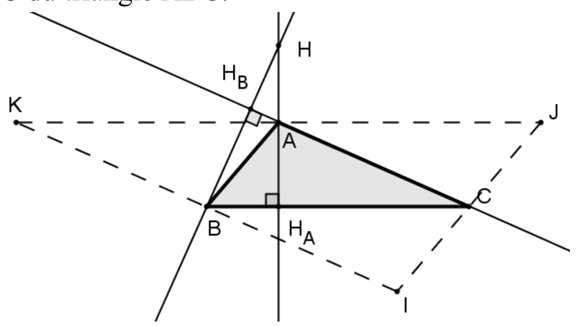
On appelle K le milieu du segment [AG].
Puisque (BG) est la médiane issue de B dans le triangle ABC, on a :
Aire (ABG) = aire (BGC).Puisque K et A' sont les milieux respectifs de [AG] et [BC], on a :
Aire (ABG) = 2 × aire (GBK) et aire (BGC)= 2 × aire (GBA').

Donc GBK et GBA’ ont la même aire. Par conséquent, G est le milieu du segment [AK].
En conséquence : AK = KG = GA’. G est donc situé aux deux tiers de la médiane [AA’] en partant du sommet.

2. Hauteurs d’un triangle

Soit H_A et H_B les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B dans le triangle ABC.
On mène par A, B et C les parallèles à (BC), (AC) et (AB) (respectivement. Ces droites déterminent un triangle IJK.
Les quadrilatères BCAK et BCJA sont des parallélogrammes (côtés deux à deux parallèles). On en déduit que :
BC = KA et BC = AJ donc KA = AJ. Et comme A est un point de (KJ), on en déduit que A est le milieu de [KJ].
De façon analogue, on établit que B est le milieu de [KI] et C celui de [IJ].
La droite (AH_A) passe par le milieu du segment [KJ]. Elle est, de plus, perpendiculaire à (KJ) (en effet : (AH_A) est perpendiculaire à (BC) et (BC) est parallèle à (KJ)).
(AH_A) est donc la médiatrice du segment [KJ]. On démontre de même que (BH_B) est la médiatrice du segment (KI).
Le point d’intersection H de ces deux médiatrices est donc le centre du cercle circonscrit au triangle IJK.
La médiatrice relative au côté [IJ] passe par H (puisque les trois médiatrices du triangle IJK sont concourantes) et par C, milieu de [IJ].
La droite (CH) est donc perpendiculaire à (IJ) et, comme (IJ) et (AB) sont parallèles, la droite (CH) est perpendiculaire à (AB). C’est donc la hauteur issue de C du triangle ABC.





Conclusion : Les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes au point H.

3. Droite d’Euler

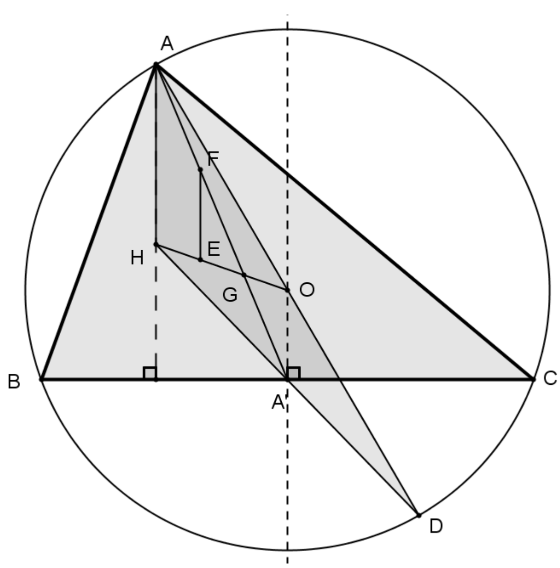
Soit ABC un triangle non équilatéral, O, G, H respectivement son centre du cercle circonscrit, centre de gravité et orthocentre.
On appelle A’ le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A dans la symétrie de centre O.

a. (AA’) est la médiane issue de A dans le triangle ABC et, comme G est le centre de gravité de ce triangle, G est situé aux deux tiers de cette médiane.

Démontrons que (AA’) est la médiane issue de A dans le triangle AHD.

Les droites (OA’) et (AH) sont toutes deux perpendiculaires à (BC) (la première est la médiatrice du segment [BC] et la seconde la hauteur issue de A).

On en déduit que les droites (AH) et (OA’) sont parallèles.
Considérons alors le triangle AHD. Dans ce triangle, la droite (OA’) est parallèle au côté (AH) et passe par le milieu de [AD].
Elle coupe donc le côté [DH] en son milieu.
On en déduit que **A’ est le milieu du segment [DH]** et que (AA’) est la médiane issue de A dans le triangle AHD.
G, situé aux deux tiers de [AA’] est donc le centre de gravité du triangle AHD.
D’autre part : (HO) est la médiane issue de H dans le triangle AHD (puisque A et D sont symétriques par rapport à O, O est le milieu du segment [AD]). G appartient donc à (HO).



En conclusion : Les points O, G et H sont alignés.

b. Soit F le milieu du segment [AG]. La parallèle à (AH) passant par F coupe [HO] en son milieu. E est donc le milieu de [HO]

De plus, AH = 2 FE. On a vu que la droite (OA’) joignait les milieux de deux côtés du triangle AHD. Donc AH = 2 OA’.

En conclusion : AH = 2OA’ = 2EF. En particulier OA’ = FE.

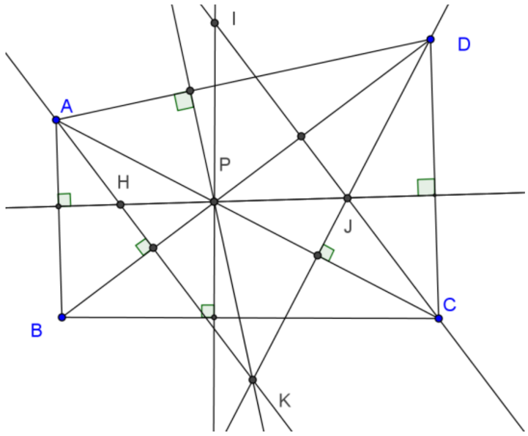
Le quadrilatère A’EFO est non croisé et les côtés [FE] et [OA’] sont parallèles et de même longueur. C’est donc un parallélogramme. Les diagonales d’un parallélogramme ayant même milieu, on a : EG = GO.

Les points H, E, G, O, alignés dans cet ordre sont tels que HE = EG = GO. Donc OH = 3 OG.

4. **a.** Si les points H, J et P sont alignés, alors les droites (PH) et (PJ) sont confondues. Par définition de P et de J, les droites (AB) et (CD) sont donc perpendiculaires à une même droite et le quadrilatère ABCD est un trapèze.

b. Si de plus les points I, K et P sont alignés, par le même raisonnement, les droites (AD) et (BC) sont aussi parallèles et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

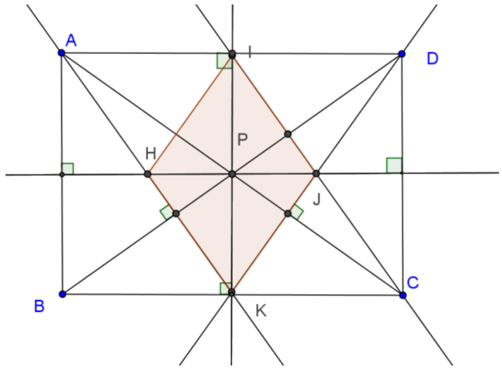
c. On suppose maintenant que le quadrilatère ABCD est un rectangle. Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles ainsi que les droites (AD) et (BC).



On en déduit que les droites (PH) et (PJ) sont parallèles comme les droites (PI) et (PK). Le quadrilatère HIJK a donc ses diagonales qui se coupent en P. De plus comme (AB) et (AD) sont perpendiculaires, ce qui conduit à la perpendicularité des diagonales de HIJK.

De plus les droites (AH) et (CJ) sont perpendiculaires à (BD) donc parallèles et les droites (BH) et (DJ) sont perpendiculaires à la droite (AC) donc parallèles.

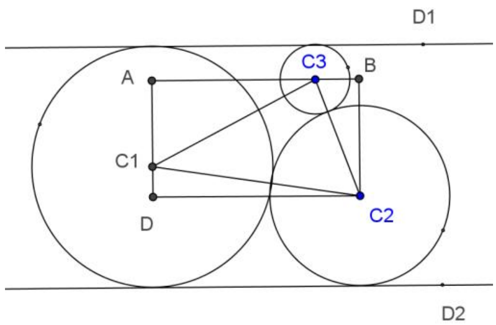
On en déduit que HIJK est un losange.



5. On joint les centres, C_1, C_2 et C_3 des trois cercles pour former un triangle, comme sur la figure ci-contre. On mène par ces centres des parallèles ou des perpendiculaires à la droite D_1 pour former le rectangle ABC_2D.

Chaque segment joignant deux centres passe par le point de tangence des deux cercles. Si on note r le rayon du cercle de centre C_1, alors :

$C_1C_2 = r + 9$, $C_1C_3 = r + 4$ et $C_3C_2 = 13$.



En s’appuyant sur le fait que ABCD est un rectangle tel que (AB) soit parallèle à D_1 et à D_2, on obtient :

$C_1D = r - 9$, $C_1A = r - 4$, et $C_2B = AD = 2r - 13$.

Le théorème de Pythagore appliqué dans les triangles rectangles AC_3C_1, DC_1C_2 et BC_2C_3 donne successivement : $AC_3 = 4\sqrt{r}$, $DC_2 = 6\sqrt{r}$ d’où $BC_3 = AB - AC_3 = DC_2 - AC_3 = 2\sqrt{r}$ et

$(2r-13)^2 + \left(2\sqrt{r}\right)^2 = 13^2$ soit $4r\left(r-12\right) = 0$. On ne retient que $r = 12$.

Combinatoire et probabilités

1. Dans le développement du produit, on multiplie d'abord le *a* de la première parenthèse par chaque terme de la deuxième parenthèse, ce qui donne 9 termes. On multiplie ensuite le *b* par chaque terme de la deuxième parenthèse, ce qui ne donne que 8 termes nouveaux car on retrouve le terme $a \times b$. En continuant ainsi, on obtient au total $9+8+7+6+5+4+3+2+1$ termes distincts soit 45 termes différents.

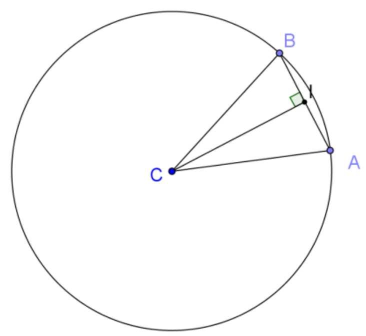
2. On note *a b c d e* un tel entier naturel. Les conditions fixées s'écrivent $b > c$, $b > a$, $d > c$ et $d > e$.
On peut déjà remarquer que *b* et *d* ne peuvent pas prendre les valeurs 1 et 3 et *a*, *c* et *e* ne peuvent pas prendre la valeur 9.
La valeur 9 ne peut donc être prise que par *b* ou par *d*. Une fois le 9 attribué, l'autre valeur prise par *b* ou par *d* ne peut être que 5 ou 7.

- Si $b = 9$ et $d = 5$, le nombre cherché s'écrit *a* 9 *c* 5 *e*. Comme $d > c$ et $d > e$, *c* et *e* doivent prendre les valeurs 1 et 3 et a la valeur 7. On a donc deux entiers possibles : 79 351 et 79 153 ;
- Si $b = 9$ et $d = 7$, le nombre cherché s'écrit *a* 9 *c* 7 *e*. Les conditions imposées sont alors toutes remplies quel que soit le choix du triplet (a, c, e). On a donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ entiers possibles dans ce cas ;
- Si $b = 7$ et $d = 9$, on a de même 6 entiers possibles ;
- Si $b = 5$ et $d = 9$, le nombre cherché s'écrit *a* 5 *c* 9 *e*. Comme $b > a$ et $b > c$, *a* et *c* prennent les valeurs 1 et 3 d'où *e* vaut 7. Il n'y a donc que deux entiers possibles.

Au total, on a : $2+6+6+2=16$ entiers vérifiant les conditions imposées.

3. Les résultats possibles à l'issue des deux tours de flèche sont les couples (a, b) où a et b peuvent prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4. Les numéros obtenus à chaque tour de la flèche sont équiprobables donc, en faisant un tableau à double entrée des produits possibles et en comptant le nombre de fois où l'on obtient ces produits, on constate que le produit le plus fréquent et donc le plus probable est 4.

4. Soit A, B et C les positions respectives de Alain, Bob et Clarisse. Le point A est sur le cercle de centre C et de rayon 10.
Après la marche, B se trouve sur le même cercle.
Soit B1 et B2 les deux points du cercle qui sont à 10 m de A.
Bob est plus proche d'Alain que Clarisse quand B est sur l'arc B1B2.
Les triangles CB1A et CB2A sont équilatéraux. Donc l'angle B1CB2 = 2 x 60 ° = 120° = 1/3 de 360°
Donc la probabilité cherchée est de 1/3

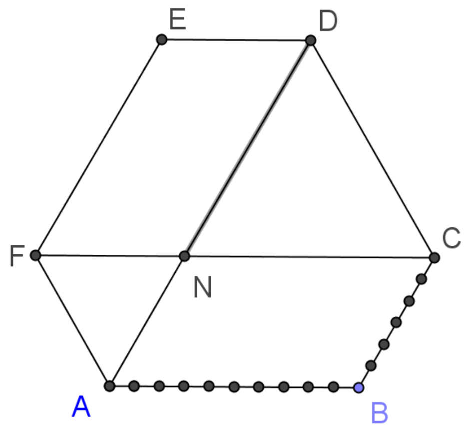


.

5. Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3.
Puisque la somme des chiffres ne dépend pas de l'ordre des chiffres, on peut changer cet ordre et considérer un entier de quatre chiffres consécutifs rangés dans l'ordre décroissant.
On obtient alors les nombres 3210, 4321, 5432, 6543, 7654, 8765 et 9876.
Les sommes respectives sont 6, 10, 14, 18, 22, 26 et 30. Seules les sommes 6, 18 et 30 sont divisibles par 3 donc seuls les nombres 3210, 6543 «et 9876 sont divisibles par 3.
Il y a 18 nombres compris entre 1 000 et 10 000 avec les quatre chiffres 3, 2, 1, 0. Ils ne peuvent en effet avoir comme chiffre des milliers que 3, 2 ou 1. Mais il y a ensuite 3 possibilités pour le chiffre des centaines puis 2 pour le chiffre des dizaines et une seule pour le chiffre des unités. Dans ce cas au total, $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$
Il y en a 24 avec les quatre chiffres 6, 5, 4, 3 et 24 avec les chiffres 9, 8, 7, 6. Dans chaque cas, il y a quatre possibilités pour le chiffre des milliers, 3 possibilités pour le chiffre des centaines puis 2 pour le chiffre des dizaines et une seule pour le chiffre des unités. Dans chaque cas au total, $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
On a donc au total $18+24+24=66$ entiers satisfaisant aux conditions posées.

6. **Cas général :** On découpe le polygone en quatre parties :

- deux parallélogrammes ABCN et FNDE, de mêmes dimensions *m* et *n* ;
- deux triangles équilatéraux ANF et NCD dont les côtés mesurent respectivement *n* et *m*.



Le nombre de points marqués dans les deux parallélogrammes (frontières comprises) est $(m+1)(n+1)$.

Sans recompter les points marqués sur les segments [FN] et [FA], le nombre de points nouveaux marqués dans le triangle AFN est $(n-1)+(n-2)+...+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ et le nombre de nouveaux points marqués dans le triangle NCD est $(m-1)+(m-2)+...+1=\dfrac{m(m-1)}{2}$.

Le nombre total de points marqués est donc $2(m+1)(n+1)+\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{m(m-1)}{2}$

Pour $m=10$ et $n=6$, on obtient 154 + 15 + 45 = 214.

Equations

1. L'égalité donnée en équation ne peut être vérifiée que dans trois cas : $x^2-5x+5=1$, $x^2-5x+5=-1$ et l'exposant $x^2+4x-60$ est pair ou $x^2+4x-60=0$ et $x^2-5x+5\neq 0$.

1[er] cas : l'équation s'écrit $x^2-5x+4=0$ soit $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+\frac{16}{4}=0$ soit $\left(x-\frac{5}{2}-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\right)=0$.

Les solutions sont donc 1 et 4.

2[ème] cas : l'équation à résoudre est $x^2-5x+6=0$ dont les solutions, obtenues de la même façon, sont 2 et 3.

Or $x^2+4x-60$ ne sera pair que si x^2 est pair car $4x-60$ est pair.

Si $x=2$ alors $x^2=4$ ce qui donne un nombre pair. Donc 2 est une solution.

Si $x=3$ alors $x^2=9$ ce qui donne un nombre impair. Donc 3 n'est pas une solution.

3[ème] cas : l'équation $x^2+4x-60=0$ s'écrit $(x+2)^2-64=0$ et a pour solutions 6 et -10 .

La somme des solutions de l'équation initial est donc : $1+4+2+6-10=3$.

2. On note *x* la distance en km parcourue par Julie en montée, *y* celle en km parcourue par Julie en terrain palt et *z* celle en km parcourue par Julie en descente, lorsqu'elle se déplace de J à G.

En se déplaçant de G à J, Julie parcourt donc *z* km en montant, *y* km à plat et *x* km en montant.

3 heures et 40 minutes correspondent à $3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ d'heure et 4 heures et 20 minutes correspondent à $4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$

Les temps de parcours aller et retour pour Julie se traduisent donc par les deux équations :

$$\frac{x}{63}+\frac{y}{77}+\frac{z}{99}=\frac{11}{3} \quad \text{et} \quad \frac{x}{99}+\frac{y}{77}+\frac{z}{63}=\frac{13}{3}.$$

On cherche en fait la valeur de la somme $x+y+z$. En additionnant membre à membre les deux équations précédentes, on aboutit à $x\times\frac{18}{7\times9\times11}+y\times\frac{2}{77}+z\times\frac{18}{7\times9\times11}=8$ soit $\frac{2}{77}(x+y+z)=8$ ce qui donne $x+y+z=308$. La distance de J à G est donc de 308 km.

3. L'égalité $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{b^2-2b}$ s'écrit aussi, en réduisant la somme au même dénominateur, $\frac{11}{a}=\frac{1}{b^2-2b}$ soit $11\left(b^2-2b\right)=6a$.

Puisqu'on travaille avec des entiers et puisque le membre de gauche est divisible par 11, celui de droite doit aussi l'être. Comme 11 ne divise pas 6 et est premier (notion intuitive pour les élèves de troisième), 11 doit diviser *a*. Il existe donc un entier p tel que $a=11p$ et on se ramène à $b^2-2b=6p$.

De plus, *a* et *p* doivent être positifs donc, comme $b^2-2b=b(b-2)$, *b* doit être un entier supérieur à 2.

Enfin, plus b est petit plus b^2-2b l'est donc plus *a* l'est.

On vérifie que si b vaut 3, 4 ou 5, b^2-2b n'est pas divisible par 6 et que si $b=6$ alors $b^2-2b=6\times4$.

La plus petite valeur possible de *b* est donc 6 et celle de *a* est alors 44.

La plus petite valeur de $a+b$ est donc 50.

4. On considère deux cas : $y<60$ et $y\ldots60$.

<u>1^er cas :</u> $y<60$

Comme de plus $\min(x,y)\ldots y$, alors $\min(x,y)<60$ et le membre de gauche de l'équation vaut 60.

De plus $\max(60,y)\ldots 60$ donc le membre de droite vaut *y* car $y<60$. Donc lorsque $y<60$, la seule solution est y = 60. C'est impossible.

<u>2^ème cas</u> : $y\ldots 60$

- Si $x<y$ alors $\min(x,y)=x$ donc le membre de gauche est égal à $\max(60,x)$. D'autre part, *x* et 60 sont inférieurs ou égaux à *y* donc $\min(\max(60,x),y)=\max(60,x)$.

L'équation s'écrit donc $\max(60,x)=\max(60,x)$ et est vérifiée pour tout couple (x,y) tel que $x<y<60$.

- Si $x\ldots y$, alors $\min(x,y)=y$ et le membre de gauche s'écrit $\max(60,y)$ c'est-à-dire *y*. De plus on a alors $x\ldots 60$ donc le membre de droite s'écrit $\min(x,y)$ c'est-à-dire *y* et l'équation s'écrit $y=y$.

  Elle est donc vérifiée pour tout couple (x,y) tel que $x\ldots y\ldots 60$.

Au final, l'équation donnée est vérifiée tout couple (x,y) tel que $y\ldots 60$.

Puisque $1 ,, \ x ,, \ 100$, il y a 100 valeurs possibles pour *x*. Puisque $60 ,, \ y ,, \ 100$, il y a 41 valeurs possibles pour *y*. Au total, il y a donc 4 100 couples solutions possibles.

5. Notons ces cinq masses a,b,c,d,e avec $a<b<c<d<e$. Les deux plus petites sommes de deux de ces nombres sont $a+b$ et $a+c$ et les deux plus grandes $c+e$ et $d+e$. Donc $a+b=16$, $a+c=18$, $c+e=26$ et $d+e=27$

Si $a\le 5$, alors $c\ge 13$ (car $a+c=18$). Or si $c\ge 13$, alors $e\le 13$ Impossible car on aurait alors $e\le c$.
Si $a=6$, alors $b=10, c=12, d=13, e=14$.
Si $a=7$, alors $b=9, c=11, d=12, e=15$
Si $a\ge 8$, alors $b\le 8$ ($a+b=16$). Impossible car on aurait alors $b\le a$.
Ces informations sont donc insuffisantes puisqu'il existe deux solutions (6;10;12;13;14) et (7;9;11;12;15).

6. Soient a,b,c,a',b',c' les six entiers écrits sur les faces du cube.

La somme des huit produits est

$$S=abc+abc'+ab'c+ab'c'+a'bc+a'bc'+a'b'c+a'b'c'.$$

$$S=ab(c+c')+ab'(c+c')+a'b(c+c')+a'b'(c+c')$$

$$S=(ab+ab'+a'b+a'b')(c+c')$$

$$S=(a+a')(b+b')(c+c').$$

Or $S=70$.

$70=2\times 5\times 7$

Les nombres cherchés étant supérieurs ou égaux à 1.

A l'ordre près, on obtient $\begin{cases} a+a'=2 \\ b+b'=5 \\ c+c'=7 \end{cases}$.

2+5+7=14. La somme cherchée est donc égale à 14.