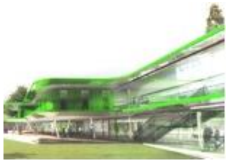
académie Versailles

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

Collège
Rameau
Versailles



Collège Paul FORT
Montlhéry

« La musique est une science qui doit avoir des règles certaines ; ces règles doivent être tirées d'un principe évident, et ce principe ne peut guère nous être connu sans le secours des mathématiques. Aussi dois-je avouer que, nonobstant toute l'expérience que je pouvais m'être acquise dans la musique pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des mathématiques que mes idées se sont débrouillées et que la lumière y a succédé à une certaine obscurité, dont je ne m'apercevais pas auparavant. »

Jean-Philippe Rameau, *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels*, Paris 1722

Stage « résolution de problèmes » proposé à des collégiens talentueux et motivés désignés par leurs établissements, les 20 et 21 octobre 2016

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le siège d'INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge, cette année le collège Jean-Philippe Rameau de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Thierry ICHELMANN, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (IPR honoraire), Évelyne ROUDNEFF, Christine WEILL, Joffrey ZOLNET

Les responsables des établissements d'accueil : Caroline TALLEC, Principale du collège Paul Fort, Jean-Paul JOUAN, Proviseur du lycée Camille Pissarro, Jean-Pierre GRATIEN, Principal du collège Jean-Philippe Rameau,

Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Jérôme CERISIER (Lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Alfred Kastler, CERGY), Muriel DUGAST (Collège de Sainte Apolline, COURDIMANCHE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Thibault FOUCHÉ (Lycée Louis de Broglie, MARLY LE ROI), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Stéphane OBAMA (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Laure PEROT (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Martine ZNATY (Collège Les Hauts Grillets, SAINT GERMAIN EN LAYE)

Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves

Programme du stage des 20 et 21 octobre 2016

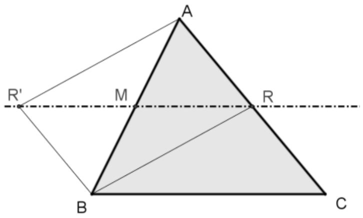
Jeudi 20 octobre						
	Montlhéry	**Pontoise 1**	**Pontoise 2**	**Versailles 1**	**Versailles 2**	**Versailles 3**
10	**Géométrie** Nicolas FIXOT	**Cryptographie** Odile DELASSUS	**Géométrie** C. HOUARD M. DUGAST	**Géométrie** M. SALMON S. OBAMA	**Équations** Martine ZNATY	**Cryptographie** L. PEROT C.DEGUIL
11.45	**Film ou repas** (*Dédoublement éventuel*)					
12. 30	**Repas ou film** (*Dédoublement éventuel*)					
13. 15 à 14.45	**Équations** Nicolas FIXOT	**Nombres** Konrad RENARD	**Cryptographie** Odile DELASSUS	**Cryptographie** L. PEROT C.DEGUIL	**Géométrie** M. SALMON S. OBAMA	**Équations** Martine ZNATY
15 à 16.30	**Cryptographie** Christine WEILL	**Géométrie** C. HOUARD M. DUGAST	**Nombres** Konrad RENARD	**Équations** Martine ZNATY	**Cryptographie** L. PEROT C.DEGUIL	**Géométrie** M. SALMON S. OBAMA

Vendredi 21 octobre						
	Montlhéry	**Pontoise 1**	**Pontoise 2**	**Versailles 1**	**Versailles 2**	**Versailles 3**
1O	**Combinatoire Dénombrement** Christine WEILL	**Équations** T. FOUCHÉ J. MORAND	**Aires et volumes** C. HOUARD M. DUGAST	**Combinatoire Dénombrement** Joffrey ZOLNET	**Aires et volumes** C. DEGUIL	**Nombres** Jérôme CERISIER
11.45	**Film ou repas** (*Dédoublement éventuel*)					
12.30	**Repas ou film** (*Dédoublement éventuel*)					
12.45 à 14.30	**Aires et volumes** Xavier GABILLY	**Aires et volumes** C. HOUARD M. DUGAST	**Combinatoire Dénombrement** Bruno BAUDIN	**Nombres** Jérôme CERISIER	**Combinatoire Dénombrement** Joffrey ZOLNET	**Aires et volumes** C. DEGUIL
14.45 à 16.30	**Nombres** Xavler GABILLY	**Combinatoire Dénombrement** Bruno BAUDIN	**Équations** T. FOUCHÉ J. MORAND	**Aires et volumes** C. DEGUIL	**Nombres** Jérôme CERISIER	**Combinatoire Dénombrement** Joffrey ZOLNET

Thème : Géométrie plane

1. Géométrie affine : Tout ou presque avec un parallélogramme

a. Le théorème de la droite pas encore des milieux et sa réciproque



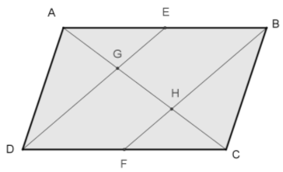
Le théorème : Soit une droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle. Si cette droite est parallèle à un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

Sa réciproque : Soit une droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle. Si cette droite passe par le milieu d'un autre côté, alors elle est parallèle au troisième côté.

Soit M le milieu du côté [AB]. La parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en R. Soir R' le symétrique de R par rapport à M. Le quadrilatère ARBR' est un parallélogramme (ses diagonales ont même milieu). Les droites (BR') et (RA) sont donc parallèles. Il s'ensuit que le quadrilatère RCBR', dont les côtés ont des supports parallèles, est un parallélogramme. D'où on tire l'égalité des longueurs BR' et CR, et donc de CR et RA : R est le milieu de [AC].

La réciproque… utilise le théorème direct : la droite passant par les milieux de deux côtés coupe le second en un point qui appartient (théorème direct) à la parallèle au troisième côté passant par le milieu du premier : ces deux droites n'en font qu'une.

b. Médianes et diagonales d'un parallélogramme

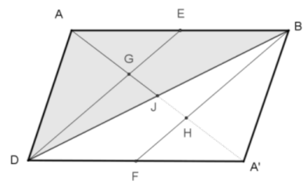


On peut appeler « médiane » d'un parallélogramme ABCD toute droite passant par un des sommets et le milieu d'un côté n'ayant pas ce sommet pour extrémité (sur la figure, (DE) est une médiane). Les médianes issues des deux sommets d'une diagonale partagent l'autre diagonale en trois : AG = GH = HC. On n'a souvent besoin que d'une médiane, qui crée un partage 2/3 – 1/3 sur la diagonale.

Les droites (DE) et (BF) sont parallèles comme supports de côtés opposés du parallélogramme EBFD (ses diagonales ont le même milieu, centre de symétrie du parallélogramme ABCD). Chacune est donc « droite des milieux » (on a droit à ce nom, maintenant) des triangles ABH et CDG respectivement.

Cette propriété fournit en particulier les égalités AG = GH = HC. On n'a souvent besoin que d'une médiane, mais le découpage en trois ne sort pas facilement si on n'a pas considéré la seconde.

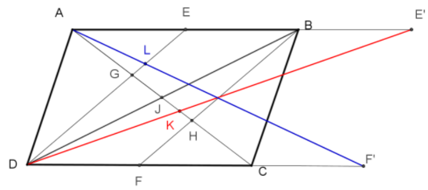
c. Le concours des médianes d'un triangle



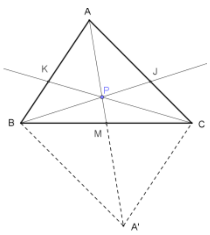
On s'intéresse au point d'intersection G des médianes [DE] et [AJ] du triangle ABD.

Pour cela, on considère le parallélogramme ABA'D. Le point A' est le symétrique de A par rapport à J. [DE] apparaît comme une « médiane » du parallélogramme. Le point G est donc au tiers de [AA'] en partant de A, donc AG = ⅔ AJ. Si on était parti de la médiane issue de B du triangle ABD, on aurait obtenu le même point G, l'égalité AG = ⅔ AJ demeurant. Donc les médianes d'un triangle sont concourantes et leur point de concours se trouve aux deux tiers de chacune d'elles partant du sommet.

d. Comment obtenir d'autres rapports rationnels



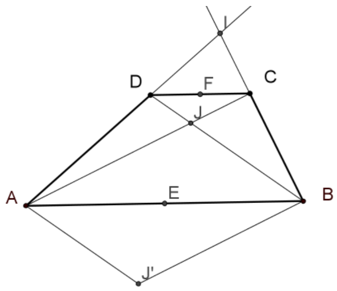
Les exemples précédents sont une incitation à poursuivre : Sur la figure ci-contre, E est au tiers du côté [AI] du parallélogramme AE'F'D.



On montrera que EL = ¼ ED et que AK = ⅗ AC.

Un autre exemple : sur la médiane [AM] du triangle ABC, on place le point P. Notons q le rapport $\frac{PM}{AM}$. Exprimer en fonction de q les rapports $\frac{PJ}{BJ}$ et $\frac{PK}{CK}$.

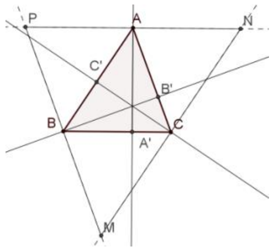
e. Et avec un trapèze ?



Considérons un trapèze ABCD et les milieux E et F de ses bases. Les diagonales se coupent en J et les côtés non parallèles en I.

- Les points I, E et F sont alignés : pour cela, on commence par appeler F' le point d'intersection de (IE) avec (CD) – *non représenté sur la figure, cela vaut mieux* – et de considérer les couples de triangles ICD et IBA, ICF' et IBE, IF'D et IEA…

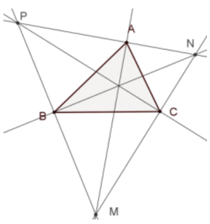
- Appelons J' le symétrique de J par rapport à E. Appelons X le point d'intersection de (IJ') avec (DB) – *ce point n'est pas indiqué sur la figure, la conclusion dira pourquoi.* Les triangles IDX et IAJ' sont en situation de Thalès. Si on appelle Y le point d'intersection de (IJ') avec (AC) – *lui non plus n'est pas sur la figure* – on obtient des triangles ICY et IBJ' en situation de Thalès. Quelques égalités de rapports convainquent que X et Y ne font qu'un avec J.



2. Des propriétés de concours en géométrie euclidienne

a. Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes (C'est un rappel)

b. Les hauteurs d'un triangle sont les médiatrices d'un triangle « plus grand »

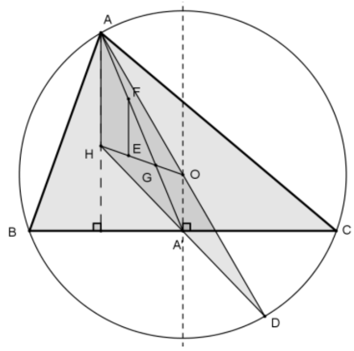


(Voir que APBC est un parallélogramme, ANCB aussi…)

c. Les bissectrices des angles d'un triangle sont les hauteurs d'un triangle « plus grand »

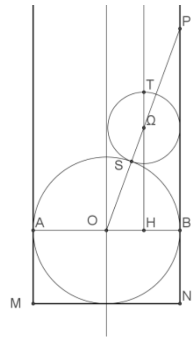
(Voir que les perpendiculaires aux bissectrices passant par les sommets – les bissectrices extérieures – se coupent deux à deux en des points appartenant à la troisième bissectrice intérieure)

3. Affine et euclidien ensemble : la droite d'Euler



Soit ABC un triangle non équilatéral. On appelle respectivement O, G, H le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre de ce triangle.
Démontrer que les points O, G et H sont alignés et que OH = 3OG.
Définition : La droite qui contient les points O, G et H est appelée droite d'Euler du triangle ABC.
(Indications : on appelle A' le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A dans la symétrie de centre O.
(a) Que représente le point G pour le triangle AHD ? En déduire que les points O, G et H sont alignés.
(b) Soit F le milieu du segment [AG]. La parallèle à (AH) passant par F coupe (HO) en E. Démontrer que : AH = 2OA' = 2EF. En déduire que EG = GO. Conclure.)

4. La tête au carré



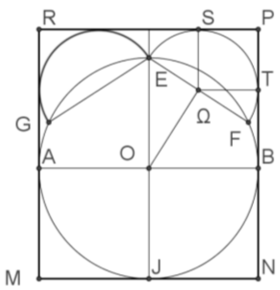
a. Oreilles décollées

Les deux petits cercles du diagramme ont le même rayon. Chacun des trois cercles est tangent aux deux autres cercles et chacun des cercles est tangent à un des côtés du rectangle. Le rectangle a une largeur de 4, quelle est sa longueur ?

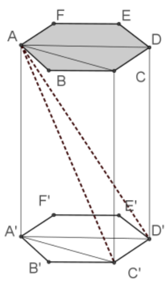
Appelons Ω le centre d'un des petits cercles et S son point de contact avec le grand cercle. Soit H le projeté orthogonal de Ω sur [AB]. Si on appelle R le rayon du grand cercle et r le rayon du petit cercle, l'hypoténuse du triangle OΩH mesure $R + r$ et le côté [OH] mesure $R - r$. En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve que la mesure de [ΩH] est $2\sqrt{Rr}$. Ce résultat est général, mais dans le cas qui nous occupe, cela donne $\Omega\mathrm{H} = 2\sqrt{2}$, et donc $\mathrm{HT} = 1 + 2\sqrt{2}$. Le total, pour la longueur de la boite, est donc $3 + 2\sqrt{2}$.

b. Oreilles collées

Cette fois, on a représenté dans un rectangle un grand cercle et des demi-cercles dont les diamètres ont une extrémité commune tangents à deux côtés du rectangle. Quelle est la longueur du rectangle ?



Thème : Aires et volumes



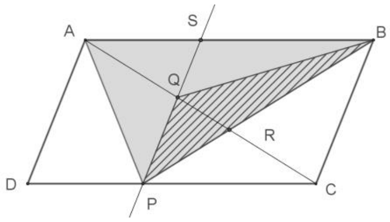
1. Prisme

Les diagonales (voir le sens à donner à ce mot) d'un prisme droit dont la base est un hexagone régulier mesurent 12 et 13. Quel est le volume de ce prisme ?

Les diagonales possibles sont les diagonales des faces rectangulaires et les diagonales des rectangles « intérieurs » ADD'A' et ACC'A' par exemple. Ce sont celles que nous retenons. Appelons R le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone ABCDEF. AD = 2R. Le triangle ACD est rectangle en C, il s'ensuit que AC = $R\sqrt{3}$

Appelons h la hauteur du prisme. La diagonale du rectangle ADD'A' vérifie : $13 = \sqrt{4R^2 + h^2}$ et celle de ACC'A' vérifie $12 = \sqrt{3R^2 + h^2}$ (on choisit la plus grande pour l'égaler à 13). Il s'ensuit que $R^2 = 25$, donc $h = \sqrt{69}$.

L'aire d'une base est $A = \frac{3\times\sqrt{3}}{2}R^2$. Le volume est donc $V = \frac{9}{2} * 25\sqrt{23}$

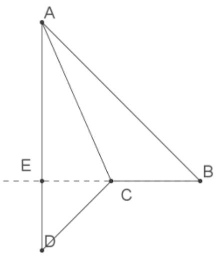


2. Jouons au territoire

Sur le côté [CD] du parallélogramme ABCD, on place un point P. La parallèle à (DA) passant par P coupe la diagonale [AC] en Q. Les aires des triangles BQP et ABP sont respectivement 2 et 6. Quelle est l'aire du triangle BCP ?

L'aire du parallélogramme ABCD est 12 (le double de 6). L'aire du triangle BQP est égale à l'aire du triangle CQP (glissement d'un sommet sur une parallèle au côté opposé). Mais le triangle CQP est une réduction du triangle CAD, dont l'aire est le tiers de ce dernier. Cela signifie que $\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CD}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ce rapport est le même que celui de l'aire du parallélogramme BCPS à celle de ABCD (attention, ici il n'y a pas réduction, une seule dimension change). L'aire de BCPS est donc $4\sqrt{3}$ et celle du triangle BCP en est la moitié, soit $2\sqrt{3}$.

3. Pointe de flèche

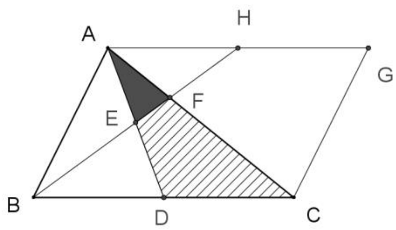


Le quadrilatère ABCD possède trois angles de 45°, en A, B et D. La diagonale [AC] mesure 6. Quelle est l'aire du quadrilatère ?

Le point E, intersection de (BC) et (AD), est le sommet de l'angle droit du triangle rectangle isocèle AEB. La figure se décompose en deux triangles rectangles isocèles AEB et CED. Son aire est donc : $A = \frac{1}{2}(\mathrm{EC}^2 + \mathrm{EA}^2)$. Mais, par hypothèse, l'hypoténuse du triangle rectangle AEC est 6. Donc $A = 18$.

NB Plusieurs figures sont possibles.

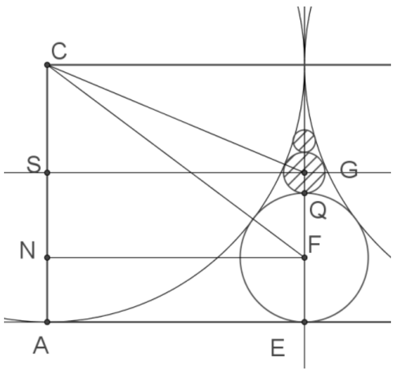
4. Encore un découpage *(Il est préférable de traiter cet exercice après le thème géométrie)*



On considère un triangle ABC, le milieu D du côté [BC] et le milieu E de [AD]. La droite (BE) coupe [AC] en F. Quel est le rapport de l'aire du quadrilatère CDEF à celle du triangle ABC ?

Considérons le point H, symétrique de B par rapport à E. Le quadrilatère AHDB est un parallélogramme. La droite (AH) coupe en G la parallèle à (AB) passant par C. Le quadrilatère CBAG est un parallélogramme. Il s'ensuit (voir la séance « géométrie ») que F est situé au tiers de [HB] en partant de H. L'aire du triangle AEF est donc le tiers de celle de AEH. L'aire de AEH est égale à l'aire de EBD, laquelle est le quart de celle de ABC. L'aire de ADC est la moitié de celle de ABC. La fraction cherchée est donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

5. Interstices



Les points ABCD sont les sommets d'un rectangle. Les cercles de centres C et D passant respectivement par A et B ont pour rayon 1 et sont tangents.

E est le milieu de [AB]. Sur la perpendiculaire à (AB) passant par E se succèdent les centres de cercles tangents aux deux cercles de départ et tangents deux à deux (le premier tangent à la droite (AB). Quelle est l'aire grisée ?

Appelons r le rayon du cercle de centre F et N le pied de la perpendiculaire abaissée sur (CA). Le triangle CNF est rectangle en N. Le théorème de Pythagore donne :

$(1 + r)^2 = (1 - r)^2$ +1. En développant, cette égalité conduit à $r = \frac{1}{4}$

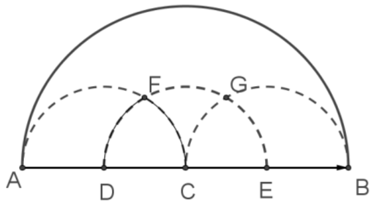
Pour le cercle de centre G, c'est le triangle GSC qu'on considère. Si on appelle s le rayon du cercle, on a : $(1 + s)^2 = \left(1 - \frac{1}{2} - s\right)^2 + 1$… et on trouve $s = \frac{1}{12}$. Pour le troisième rayon, l'équation est : $(1 + t)^2 = 1 + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - t\right)^2$, dont la solution est $t = \frac{1}{24}$.

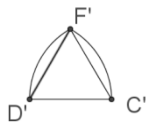
L'aire totale des trois disques est $A = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{144} + \frac{1}{576}\right)\pi$, soit $A = \frac{41}{576}\pi$.

Pour les curieux, l'aire des trois premiers disques couvre plus de 98% de l'aire cumulée des disques qu'on peut introduire dans les interstices, laquelle dépasse la moitié de l'aire ressemblant à la coupe d'un couvercle de tajine.

6. Un reste de tarte

Trois demi-disques de rayon 1 ont entamé le disque de rayon 2. Quelle fraction de l'aire initiale reste-t-il ?





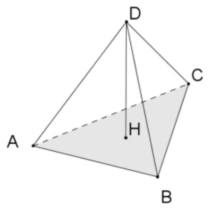
Il s'agit d'évaluer l'aire du triangle en partie curviligne D'F'C', qui est le recouvrement d'une partie du plan par deux secteurs circulaires d'angle 60° et de rayon $\frac{1}{2}$. Cette aire est le double de l'aire d'un secteur, diminuée de l'aire du triangle équilatéral : $A = 2 \times \frac{1}{6}\pi\times\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$, soit $A = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}$

Ce qu'il reste du disque de rayon 2 a donc pour aire : $R = \frac{1}{2}\times \pi\times 4\text{-}3\times\frac{1}{2}\pi\times 1+2A$

$$R = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

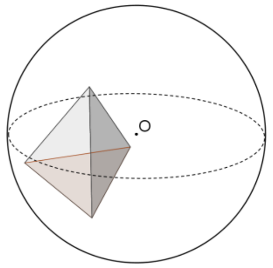
7. Ligne 13

Est-il possible de faire entrer deux tétraèdres réguliers solides de volume $\frac{1}{2}$ dans une sphère de rayon 1 ?



Un tétraèdre régulier de volume $\frac{1}{2}$ a pour arête a. Calculons a.

L'aire du triangle ABC, équilatéral est $\mathcal{B} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. La hauteur DH s'obtient, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle DHA, rectangle en H. On trouve $\mathrm{DH} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Le volume du tétraèdre est donc $= a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$. L'arête du tétraèdre régulier de volume $\frac{1}{2}$ vérifie donc $a^3 = 3\sqrt{2}$.



Comme les deux tétraèdres sont identiques, il s'agit de savoir si le point O, centre de la sphère, est extérieur à chacun d'eux. La plus petite distance entre un sommet de la sphère et un point d'une face qui ne le contient pas est la hauteur du tétraèdre. La question revient donc à savoir si la hauteur d'un tétraèdre régulier de volume $\frac{1}{2}$ est inférieure à 1 (rayon de la sphère). Ce n'est pas le cas puisque $a^3 = 3\sqrt{2}$.

Thème : Combinatoire, dénombrement

1. Jackpot

1. Au casino, une machine accepte des jetons de deux couleurs : rouges ou verts. Pour miser, on introduit un jeton d'une des deux couleurs, la machine délivre alors cinq jetons de l'autre. Au départ, on vous donne un jeton. Si vous réussissez, en misant *ad libitum*, à posséder le même nombre de jetons des deux couleurs, vous gagnez.
Pouvez-vous gagner ?
2. La police des jeux poursuit le propriétaire du casino pour fraude. L'organisation change : la machine délivre six jetons au lieu de cinq, mais le nombre de parties qu'on peut jouer en une série est limité à 20. Pouvez-vous gagner ?
1. À chaque mise, la fortune du joueur (le nombre de jetons qu'il possède) diminue d'un jeton et augmente de 5 (pour l'instant, peu importe la couleur). Elle augmente donc de 4. Au bout de n mises, elle est donc de $4n+1$. Ce nombre est impair. On ne peut faire deux parts égales. Le jeu est malhonnête.
2. Intéressons-nous à la différence (positive ou négative) entre le nombre de jetons rouges et le nombre de jetons verts possédés. Après une mise, si le jeton misé est rouge, la différence diminue de 7. Si le jeton misé est vert, cette différence augmente de 7. Au bout de n mises, la différence s'obtient en ajoutant à 1 (la différence initiale) un multiple de 7 (positif ou négatif). Elle s'écrit donc $1+7k$ (ou $-1+7k$, selon la façon de compter). Elle ne peut être nulle. Le jeu est malhonnête.
On pouvait faire le même raisonnement dans le premier cas.

2. Illumination

12 lampes sont commandées par 12 interrupteurs. Au début du problème, elles sont toutes éteintes. Au cours d'une *manœuvre*, on peut actionner exactement cinq interrupteurs. Combien faut-il de manœuvres *au minimum* pour les allumer toutes ?

Soit n le nombre cherché. n est supérieur à 2, car en 2 manœuvres, on allume au maximum 10 lampes. Lors des opérations, chaque lampe change d'état un nombre impair de fois, et il y a 12 lampes. La somme de 12 nombres impairs est un nombre pair, et ce nombre est 5 n (on a fait n manœuvres provoquant chacune 5 changements d'état). Donc n est pair.

Essayons donc avec 4 manœuvres

1^{er} tour												
$2^{ème}$ tour												
$3^{ème}$ tour												
$4^{ème}$ tour												

Les cases blanches représentent les lampes allumées : d'abord les cinq premières, puis 5 autres, enfin une autre avec 4 qu'on éteint, puis ces 4 avec la dernière.

3. Cases à cocher

Remplir les cases de la séquence de calcul suivante avec des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à 11 (non nécessairement distincts) de manière que le résultat du calcul soit un multiple de 11 :

$$A = \square \times \square + \square \times \square + 10$$

De combien de manières cela est-il possible ?

Appelons p, q, r et s, de gauche à droite, les nombres à placer dans les cases. $A-10-rs$ a un reste compris entre 0 et 10 dans la division euclidienne par 11. Quel que soit ce reste, il doit être le même que celui de pq. On peut vérifier qu'à un p donné, compris entre 1 et 10, est associé un seul q tel que l'objectif annoncé ci-dessus soit atteint. Comme les cas ne sont pas très nombreux, on peut faire un tableau pour le vérifier. 11×11 choix sont possibles pour r et s. Cela fait, chacun des 10 choix possibles pour p donne une seule possibilité pour q. On vient de dénombrer 1 210 possibilités.
Si on choisit $p = 11$, le raisonnement précédent s'applique au dénombrement des (r, s) possibles. À chaque choix de r est associée une seule valeur de s. Il y a donc 11 (pour q) fois 10 (pour r) combinaisons possibles, soit 110. Au total, 1 320 possibilités.

4. Milieu de tableau

Cete année, à mi-saison, une équipe de handball a gagné quelques matchs, fait deux fois match nul et concédé 3 défaites.
La seconde partie de la saison compte autant de matchs que la première partie. Si, dans la seconde moitié de la saison, elle aligne autant de victoires que de matchs nuls sans concéder de défaite, elle aura gagné la moitié de ses matchs sur l'ensemble de la saison.
Combien y a-t-il d'équipes dans ce championnat ?

Appelons N le nombre d'équipes dans le championnat, V le nombre de victoires obtenues pendant la première phase, W le nombre de victoires souhaitées pendant la seconde phase. L'énoncé s'écrit : $\begin{cases} N-1 = 2+3+V \\ N-1 = 2W \\ V+W = 2N-2 \end{cases}$ *Chaque équipe en rencontre $N-1$…*

On trouve qu'il y a 11 équipes dans le championnat, et que l'équipe comptera 10 victoires au total.

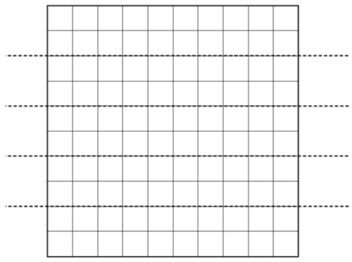
5. Cellules grises

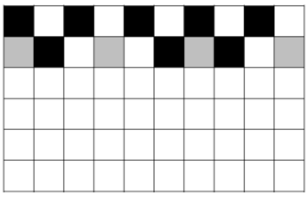
Les cases d'un échiquier de taille 10×10 sont coloriées en blanc, gris et noir. Deux cases qui ont un côté commun sont toujours de deux couleurs disctinctes. On sait qu'il y a 20 cases grises. Julie trouve qu'un rectangle 2×1 est *joli* s'il est composé d'une case blanche et d'une case noire.

1. Montrer que Julie pourra toujours découper dans l'échiquier au moins 30 jolis rectangles mais jamais plus de 40.

2. Proposer un coloriage permettant d'obtenir exactement 40 jolis rectangles.

1. Pas plus de 40 : comme il y a 20 cases grises sur 100, la place qui reste permet dans les bons cas de caser 40 fois deux cases contiguës. Découpons le plateau en cinq bandes horizontales. On fabrique ainsi 50 rectangles 2×1, dont au plus 20 ont une case grise (les deux cases d'un tel rectangle étant différemment coloriées). Il reste 30 rectangles sans case grise, donc dont une case est blanche et l'autre noire.





2. Voici un début : la première ligne contient 5 rectangles jolis, la deuxième 3, et il y a 4 cases grises. Schéma à reproduire 5 fois.

6. Changer tout

Quand on inverse l'ordre des chiffres d'un nombre de quatre chiffres, on trouve parfois un nombre plus grand que le nombre de départ. Combien de nombres de quatre chiffres possèdent-ils cette propriété ?

Notons $N = 1\,000a + 100b + 10c + d$ un tel nombre. Un entier de quatre chiffres est supérieur à un autre entier de quatre chiffres si :

- Son chiffre des milliers est strictement plus grand
- Les chiffres des milliers sont les mêmes, le chiffre des centaines du premier est supérieur strictement au chiffre des centaines du second
- Les chiffres des milliers et des centaines sont respectivement les mêmes, le chiffre des dizaines du premier est strictement supérieur au chiffre des dizaines du second
- Enfin, si les trois premiers chiffres sont respectivement les mêmes, c'est le chiffre des unités qui tranche.

Dans le cas qui nous occupe, les deux dernières hypothèses sont exclues par les premières. On doit donc dénombrer :

- Les couples (a, d) tels que $d > a$. Il y en a $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$; chacun de ces couples « couvre » 100 couples (b, c) – à ce niveau, le chiffre 0 est autorisé, il n'est interdit que pour le premier chiffre). On a donc 3 600 solutions.
- Les couples (b, c) tels que $c > b$. Il y en a $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$. Chacun de ces couples intervient dans les 9 couples (a, d) possibles. On a donc $45 \times 9 = 405$ solutions de ce type.

Au total, 40 005 solutions.

Thème : Nombres

1. Nombres coquets

Un nombre de trois chiffres est dit *coquet* s'il est le produit de son chiffre des unités par un nombre formé avec ses deux autres chiffres. Par exemple $153 = 3 \times 51$. Quels sont les nombres *coquets* ?

Écrivons $N = 100a + 10b + c$ le nombre cherché, a, b et c étant ses chiffres. La condition proposée s'écrit :
$100a + 10b + c = c(10a + b)$ ou $100a + 10b + c = c(10b + a)$
La première façon conduit à $(10a + b)(10 - c) = -c$, qui n'a pas de solution (les deux membres n'ont pas le même signe),
La seconde à $100a + c(1 - a) = 10b(c - 1)$. Il s'ensuit que $c(1 - a)$ est un multiple de 10 (positif ou négatif, dans les limites de variation de a et c).
Pour $a = 1$, $b(c - 1) = 10$ conduit à $N = 153$ ou $N = 126$
Pour $a = 3$, on n'obtient pas de solution
Pour $= 6$, on obtient $N = 688$

2. 8 chiffres pour un multiple de 8

Les huit chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont aléatoirement permutés pour écrire un nombre entier de huit chiffres. Quelle est la probabilité que ce nombre soit un multiple de 8 ?
Pour qu'en entier soit multiple de 8, il est nécessaire et suffisant que les trois derniers chiffres de son écriture forment un entier de trois chiffres multiple de 8. Seuls les trois derniers chiffres importent, donc. Il y a $8 \times 7 \times 6$ terminaisons possibles.

- Ou bien le chiffre des unités est 2. Le chiffre des dizaines doit être 1, 3, 5, ou 7 pour assurer la divisibilité par 4. Le chiffre des centaines doit alors être un des trois autres chiffres impairs (il faut ajouter 200 pour obtenir un multiple de 8, 100 ne convient pas). On a donc 4×3 = 12 possibilités.
- Ou bien le chiffre des unités est 4. Le chiffre des dizaines est alors 2, 6 ou 8. On trouve 8 solutions : 624, 824, 264, 864, 184, 384, 584 et 784.
- Ou bien le chiffre des unités est 6. Le chiffre des dizaines est alors 1, 3, 5 ou 7. La situation est la même qu'avec 2.
- Ou bien le chiffre des unités est 8 et les solutions 128, 328, 528, 728, 168, 368, 568, 768, 248 et 648.

On a donc trouvé 42 terminaisons qui conviennent sur 336. La probabilité est $\frac{1}{8}$.

3. Sans retenue

Lorsqu'on additionne deux nombres entiers consécutifs compris entre 1 000 et 2 000, on doit parfois pendre en compte une retenue, parfois non. Combien de ces additions s'effectuent-elles sans retenue ?

9	0									
8	0	1								
7	0	1	2							
6	0	1	2	3						
5	0	1	2	3	4					
4	0	1	2	3	4	5				
3	0	1	2	3	4	5	6			
2	0	1	2	3	4	5	6	7		
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Les chiffres des unités s'additionnent sans retenue : leur somme est donc inférieure ou égale à 9. Les couples possibles figurent dans le tableau ci-contre. Il y en a donc $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 55$ (l'ordre dans lequel on effectue l'addition n'a pas d'importance).
Le même raisonnement s'applique aux chiffres des dizaines et des centaines (puisqu'il s'agit d'exclure les retenues). On a donc $55 \times 55 \times 55$ additions sans retenue. Cela fait beaucoup : 166 375. Sur combien d'additions ? $1\,001 \times 1\,001$, c'est-à-dire 1 002 001. Un peu moins d'une sur 6, donc.

4. Improbable résultat

Le quotient de deux entiers naturels p et q est 0, 123 456 789 … (les décimales, après la dixième, ne sont pas connues).
Quelle est la plus petite valeur possible de q ?
Remarque préalable : observons que $9 \times 0{,}123\,456\,789 = 1{,}111\,111\,101$, tandis que $9 \times 0{,}123\,456\,79 = 1{,}111\,111\,11$. Nous cherchons des entiers…
De $0.123\,456\,789 \leq \frac{p}{q} < 0.123\,456\,79$, on déduit $81 \times 0.123\,456\,789 \leq \frac{81p}{q} < 81 \times 0.123\,456\,79$, ou encore :

$9.999\,999\,909 \leq \frac{81p}{q} < 9.999\,999\,99$, soit $10q - 9.999\,999\,909q \geq 10q - 81p > 10q - 9.999\,999\,999q$, ou encore : $0.000\,000\,091 \geq \frac{10q-81p}{q} > 0.000\,000\,001$. Il en ressort que, comme $10q - 81p$ est un entier (positif d'après les inégalités précédentes), donc un nombre supérieur à 1, $q \geq \frac{1}{0.000\,000\,091}$ et donc $q \geq 10\,989\,010$. Cela ne nous donne pas la plus petite valeur de q , mais un nombre auquel elle est supérieure. Pour continuer, on peut faire un catalogue des produits des successeurs de 10 989 010 par 0.123456789. Celui qui semble le plus proche d'un entier est 1 135 669. On peut vérifier que $\frac{1\,135\,669}{10989019} = 0.123\,456\,789\,000\,000\,8$

10989010	1356667,889	1356667,9
10989011	1356668,012	1356668,023
10989012	1356668,136	1356668,147
10989013	1356668,259	1356668,27
10989014	1356668,383	1356668,394
10989015	1356668,506	1356668,517
10989016	1356668,63	1356668,641
10989017	1356668,753	1356668,764
10989018	1356668,877	1356668,888
10989019	1356669	1356669,011
10989020	1356669,123	1356669,134
10989021	1356669,247	1356669,258

5. Jamais le dimanche

Mon année de naissance comportait un seul dimanche tombant le 7 d'un mois. Peut-il y en avoir 2, 3, pas du tout ? En quel millésime ?

Le décalage entre un jour de la semaine et son homologue le mois suivant est donné par le tableau ci-dessous (on a pris un décalage 0 pour janvier, mais tous les nombres figurant dans le tableau sont *relatifs*), qui prend en compte le cas des années bissextiles.

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
0	+4	+4	+1	−1	+3	+1	+5	+2	0	+4	+2
0 An. Bi.	+4	+3	0	+5	+2	0	+4	+1	−1	+3	+1

On voit que : pour une année non bissextile, la même distribution s'opère sur les ensembles {janvier, octobre}, {février, mars, novembre}, {septembre, décembre}, {avril, juillet}, mai, juin et août sont seuls. Cette répartition n'est utilisée ici que parce que nous nous intéressons au 7 du mois…

Pour une année bissextile, les groupes sont {janvier, avril, juillet}, {février, août}, {mars, novembre}, {septembre, décembre}, mai, juin et octobre sont seuls. Dans les deux cas, on voit apparaître 7 groupes (éventuellement réduits à une unité) de mois. Il y a au moins un dimanche 7 chaque année.

6. Philatélie

Dans un pays imaginaire les services postaux ont émis des timbres de valeurs faciales : 135, 136, 137, …, 142, 143, 144 (dans la monnaie locale).

Quelle est le plus GRAND affranchissement qui ne peut être réalisé avec ces vignettes (on peut naturellement utiliser plusieurs vignettes de même valeur) ?

On ne peut pas réaliser un affranchissement de valeur inférieure à 135, on peut tout réaliser entre 135 et 144, on ne peut réaliser aucun affranchissement entre 144+1 et 2×135 – 1 (le premier « trou » était de 134, le second est de 125). Par la suite, on peut réaliser 135+135, 135+136, 136+136, 136+137, …, 144+144 (la première série sans trou comptait 10 nombres, la seconde 19). La prochaine valeur affichable est 3×135, elle vient après un « trou » de 116.

Remarquons que $16 \times 135 = 15 \times 144 = 2\,160$. Donc, entre les sommes réalisables avec 15 timbres et celles réalisables avec 16, il n'y a plus de trou. Le trou est donc à l'étape précédente : avec 14 timbres, on réalise au maximum 2 016 , avec 15 au minimum 2025. Le dernier nombre non atteignable est 2024.

Thème : Équations

1. Avant l'heure…

Nico veut arriver à l'heure à son rendez-vous. En partant, il calcule que s'il roule à la vitesse moyenne de 60 km/h, il sera en retard de 5 min, et que s'il roule à la vitesse moyenne de 80 km/h, il sera en avance de 5 min. Finalement, il arrive exactement à l'heure. Quelle a été sa vitesse moyenne ?

Appelons t le temps de parcours idéal, et v la vitesse moyenne idéale. Les données du problème conduisent à : $60\left(t+\frac{1}{12}\right)=vt=80\left(t-\frac{1}{12}\right)$, le temps étant exprimé en heures et la vitesse en km/h. On trouve $=\frac{7}{12}$, soit 35 min. Puis $v=\frac{12}{7}\times\frac{8}{12}\times 60$, soit $v=68{,}571$ km/h, valeur arrondie au m/h.

2. Dix sommes

L'ensemble $A=\{a,b,c,d,e\}$ est constitué de nombres relatifs tous différents et tels que $a\le b\le c\le d\le e$. Lorsqu'on additionne ces nombres trois par trois, on obtient 10 (pourquoi 10 ?) sommes toutes différentes : 0, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 14 et 19. Quels sont les nombres a,b,c,d et e ?

Les dix sommes sont :

$a+b+c, a+b+d,\ \ a+b+e,\ \ a+c+d,\ \ a+c+e,\ \ a+d+e,\ \ b+c+d,\ \ b+c+e,\ \ b+d+e,\ \ c+d+e$

La plus petite de ces sommes est nécessairement $a+b+c$. La plus grande est nécessairement $c+d+e$. Par ailleurs, la somme de ces dix sommes est 90, et dans cette somme, chacun des cinq nombres apparaît exactement 6 fois. Par conséquent, la somme des six nombres est 15.

On a donc $a+b+c=0, c+d+e=19$, et $a+b+c+d+e=15$. Il s'ensuit que $c=4$.

De proche en proche, $b+d+e=14$ et $c+d+e=19$ conduisent à $c-b=5$, et donc $b=-1$, puis $a=-3$, $d=7$ et $e=8$.

Reste à vérifier que les dix sommes données sont bien atteintes.

3. Deux inconnues

Deux nombres a et b de somme non nulle sont tels que $\frac{a-b}{a+b}=9$ et $\frac{ab}{a+b}=-60$. Combien valent a et b ?

On trouve d'abord que $8a+10b=0$, et on remplace b par $-\frac{4}{5}a$ dans la seconde égalité. Ce qui donne : $-\frac{4}{5}a^2=-60\ \times-\frac{1}{5}a$

Les deux possibilités sont $a=0$ et $a=-15$. La première est exclue (car alors on aurait aussi $b=0$, et donc $a+b=0$). La seconde conduit à $b=12$.

4. Nouvelle opération

On définit une nouvelle opération, notée $\lozenge$, par :

Pour tous nombres a et b, $a\lozenge b=a+b-ab$

Trouver tous les triplets (x,y,z)tels que $(x\lozenge y)\lozenge z+(y\lozenge z)\lozenge x+(z\lozenge x)\lozenge y=0$

Écrivons autrement : $(x\lozenge y)\lozenge z=(x+y-xy)+z-(x+y-xy)z=x+y+z-xy-xz-yz+xyz$

Il s'ensuit que les trois termes de la somme à étudier sont égaux. Elle est nulle si chacun d'eux est nul.

Reste à écrire différemment l'égalité $x+y+z-xy-xz-yz+xyz=0$

Elle est identique à $(x+y-xy)(1-z)+z=0$ ou encore $(1-z)(x+y-xy-1)=1$, ou encore

$$(x-1)(y-1)(z-1)=1$$

5. Après 1 et 2, …

Deux nombres x et y sont tels que $x+y=1$ et $x^2+y^2=2$. Combien vaut x^3+y^3 ? et x^4+y^4 ?

Comme $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$, il s'ensuit que $xy=-\frac{1}{2}$

$x^3+y^3=(x^2+y^2-xy)(x+y)$, on trouve $x^3+y^3=\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 1$ et donc $x^3+y^3=\frac{5}{2}$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=4-2\times\frac{1}{4}=\frac{7}{2}$

Pour les curieux : $x^5+y^5=(x^4+y^4)(x+y)-xy(x^3+y^3)=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{19}{4}$

6. Sommes et différences remarquables

- On donne $a=5$. Trouver un entier b tel que $a^2-b^2=a+b$.
- Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2-b^2=a+b=13$?
- Prouver que s'il existe des entiers naturels a et b tels que $a^2-b^2=a+b=m$, alors m est impair

Comme $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, la première égalité s'écrit $(a+b)(a-b-1)=0$. Il s'ensuit que $b=4$.

L'égalité précédente, jointe à $a+b=13$, conduit à $a=7, b=6$

Le couple solution de l'équation $a^2-b^2=a+b$ s'écrit $(a,a-1)$. Donc $2a+1$ est impair.

Pépinière Collège
Crytpographie

Correspondance Lettre/Entier

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Tableau de Vigenère

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y