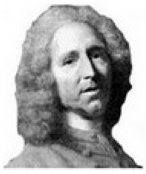
académie Versailles

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE



Collège
Rameau
Versailles

Collège Paul FORT
Montlhéry

« La musique est une science qui doit avoir des règles certaines ; ces règles doivent être tirées d'un principe évident, et ce principe ne peut guère nous être connu sans le secours des mathématiques. Aussi dois-je avouer que, nonobstant toute l'expérience que je pouvais m'être acquise dans la musique pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des mathématiques que mes idées se sont débrouillées et que la lumière y a succédé à une certaine obscurité, dont je ne m'apercevais pas auparavant. »

Jean-Philippe Rameau, *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels*, Paris 1722

Stage « résolution de problèmes » proposé à des collégiens talentueux et motivés désignés par leurs établissements, les 20 et 21 octobre 2016

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le siège d'INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge, cette année le collège Jean-Philippe Rameau de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Thierry ICHELMANN, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (IPR honoraire), Évelyne ROUDNEFF, Christine WEILL, Joffrey ZOLNET

Les responsables des établissements d'accueil : Caroline TALLEC, Principale du collège Paul Fort, Jean-Paul JOUAN, Proviseur du lycée Camille Pissarro, Jean-Pierre GRATIEN, Principal du collège Jean-Philippe Rameau,

Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Jérôme CERISIER (Lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Alfred Kastler, CERGY), Muriel DUGAST (Collège de Sainte Apolline, COURDIMANCHE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Thibault FOUCHÉ (Lycée Louis de Broglie, MARLY LE ROI), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Stéphane OBAMA (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Laure PEROT (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Martine ZNATY (Collège Les Hauts Grillets, SAINT GERMAIN EN LAYE)

Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves

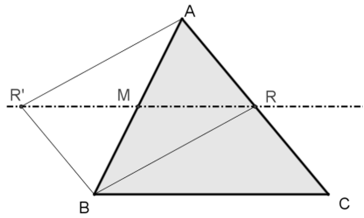
Programme du stage des 20 et 21 octobre 2016

Jeudi 20 octobre						
	Montlhéry	**Pontoise 1**	**Pontoise 2**	**Versailles 1**	**Versailles 2**	**Versailles 3**
10	**Géométrie** Nicolas FIXOT	**Cryptographie** Odile DELASSUS	**Géométrie** C. HOUARD M. DUGAST	**Géométrie** M. SALMON S. OBAMA	**Équations** Martine ZNATY	**Cryptographie** L. PEROT C.DEGUIL
11.45	**Film ou repas** (*Dédoublement éventuel*)					
12. 30	**Repas ou film** (*Dédoublement éventuel*)					
13. 15 à 14.45	**Équations** Nicolas FIXOT	**Nombres** Konrad RENARD	**Cryptographie** Odile DELASSUS	**Cryptographie** L. PEROT C.DEGUIL	**Géométrie** M. SALMON S. OBAMA	**Équations** Martine ZNATY
15 à 16.30	**Cryptographie** Christine WEILL	**Géométrie** C. HOUARD M. DUGAST	**Nombres** Konrad RENARD	**Équations** Martine ZNATY	**Cryptographie** L. PEROT C.DEGUIL	**Géométrie** M. SALMON S. OBAMA
Vendredi 21 octobre						
	Montlhéry	**Pontoise 1**	**Pontoise 2**	**Versailles 1**	**Versailles 2**	**Versailles 3**
1O	**Combinatoire Dénombrement** Christine WEILL	**Équations** T. FOUCHÉ J. MORAND	**Aires et volumes** C. HOUARD M. DUGAST	**Combinatoire Dénombrement** Joffrey ZOLNET	**Aires et volumes** C. DEGUIL	**Nombres** Jérôme CERISIER
11.45	**Film ou repas** (*Dédoublement éventuel*)					
12.30	**Repas ou film** (*Dédoublement éventuel*)					
12.45 à 14.30	**Aires et volumes** Xavier GABILLY	**Aires et volumes** C. HOUARD M. DUGAST	**Combinatoire Dénombrement** Bruno BAUDIN	**Nombres** Jérôme CERISIER	**Combinatoire Dénombrement** Joffrey ZOLNET	**Aires et volumes** C. DEGUIL
14.45 à 16.30	**Nombres** Xavler GABILLY	**Combinatoire Dénombrement** Bruno BAUDIN	**Équations** T. FOUCHÉ J. MORAND	**Aires et volumes** C. DEGUIL	**Nombres** Jérôme CERISIER	**Combinatoire Dénombrement** Joffrey ZOLNET

Thème : Géométrie plane

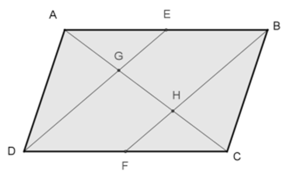
1. Géométrie affine : Tout ou presque avec un parallélogramme

a. Le théorème de la droite pas encore des milieux et sa réciproque

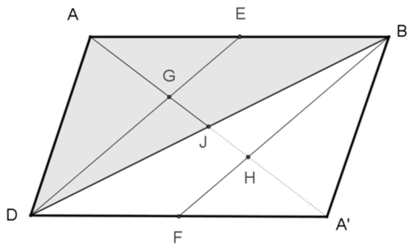


Le théorème : Soit une droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle. Si cette droite est parallèle à un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.
Sa réciproque : Soit une droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle. Si cette droite passe par le milieu d'un autre côté, alors elle est parallèle au troisième côté.

b. Médianes et diagonales d'un parallélogramme



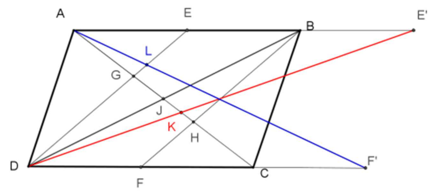
On peut appeler « médiane » d'un parallélogramme ABCD toute droite passant par un des sommets et le milieu d'un côté n'ayant pas ce sommet pour extrémité (sur la figure, (DE) est une médiane). Les médianes issues des deux sommets d'une diagonale partagent l'autre diagonale en trois : AG = GH = HC. On n'a souvent besoin que d'une médiane, qui crée un partage 2/3 – 1/3 sur la diagonale.



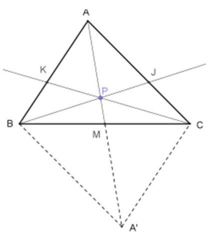
c. Le concours des médianes d'un triangle

On s'intéresse au point d'intersection G des médianes [DE] et [AJ] du triangle ABD.
Pour cela, on considère le parallélogramme ABA'D. Le point A' est le symétrique de A par rapport à J. [DE] apparaît comme une « médiane » du parallélogramme. Le point G est donc au tiers de [AA'] en partant de A, donc $AG = \frac{2}{3} AJ$. Si on était parti de la médiane issue de B du triangle ABD, on aurait obtenu le même point G, l'égalité $AG = \frac{2}{3} AJ$ demeurant. Donc les médianes d'un triangle sont concourantes et leur point de concours se trouve aux deux tiers de chacune d'elles partant du sommet.

d. Comment obtenir d'autres rapports rationnels

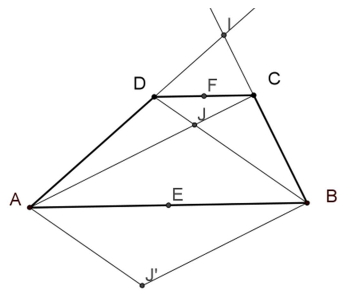


Les exemples précédents sont une incitation à poursuivre : Sur la figure ci-contre, E est au tiers du côté [AI] du parallélogramme AE'F'D. On montrera que $EL = \frac{1}{4} ED$ et que $AK = \frac{3}{5} AC$.



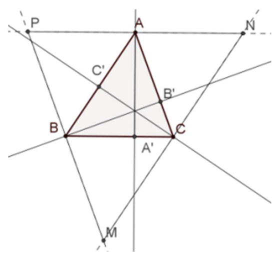
Un autre exemple : sur la médiane [AM] du triangle ABC, on place le point P. Notons q le rapport $\frac{PM}{AM}$. Exprimer en fonction de q les rapports $\frac{PJ}{BJ}$ et $\frac{PK}{CK}$.

e. Et avec un trapèze ?



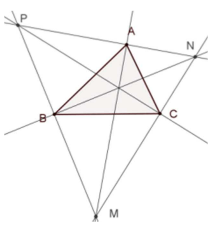
Considérons un trapèze ABCD et les milieux E et F de ses bases. Les diagonales se coupent en J et les côtés non parallèles en I.
- Les points I, E et F sont alignés : pour cela, on commence par appeler F' le point d'intersection de (IE) avec (CD) – *non représenté sur la figure, cela vaut mieux* – et de considérer les couples de triangles ICD et IBA, ICF' et IBE, IF'D et IEA…
- Appelons J' le symétrique de J par rapport à E. Appelons X le point d'intersection de (IJ') avec (DB) – *ce point n'est pas indiqué sur la figure, la conclusion dira pourquoi.* Les triangles IDX et IAJ' sont en situation de Thalès. Si on appelle Y le point d'intersection de (IJ') avec (AC) – *lui non plus n'est pas sur la figure* – on obtient des triangles ICY et IBJ' en situation de Thalès. Quelques égalités de rapports convainquent que X et Y ne font qu'un avec J.

2. Des propriétés de concours en géométrie euclidienne



a. Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes (C'est un rappel)

b. Les hauteurs d'un triangle sont les médiatrices d'un triangle « plus grand »

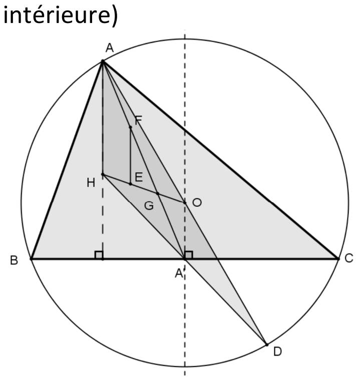


(Voir que APBC est un parallélogramme, ANCB aussi…)

c. Les bissectrices des angles d'un triangle sont les hauteurs d'un triangle « plus grand »

(Voir que les perpendiculaires aux bissectrices passant par les sommets – les bissectrices extérieures – se coupent deux à deux en des points appartenant à la troisième bissectrice intérieure)

3. Affine et euclidien ensemble : la droite d'Euler

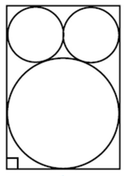


Soit ABC un triangle non équilatéral. On appelle respectivement O, G, H le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre de ce triangle.
Démontrer que les points O, G et H sont alignés et que OH = 3OG.
Définition : La droite qui contient les points O, G et H est appelée droite d'Euler du triangle ABC.
(Indications : on appelle A' le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A dans la symétrie de centre O.

*(a)	Que représente le point G pour le triangle AHD ? En déduire que les points O, G et H sont alignés.*
*(b)	Soit F le milieu du segment [AG]. La parallèle à (AH) passant par F coupe (HO) en E.*
Démontrer que : AH = 2OA' = 2EF. En déduire que EG = GO. Conclure.)

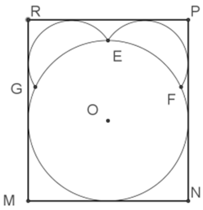
4. La tête au carré

a. Oreilles décollées



Les deux petits cercles du diagramme ont le même rayon. Chacun des trois cercles est tangent aux deux autres cercles et chacun des cercles est tangent à un des côtés du rectangle. Le rectangle a une largeur de 4, quelle est sa longueur ?

b. Oreilles collées



Cette fois, on a représenté dans un rectangle un grand cercle et des demi-cercles dont les diamètres ont une extrémité commune tangents à deux côtés du rectangle. Quelle est la longueur du rectangle ?

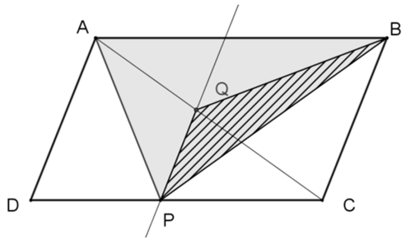
N.B. Cette situation conduit à des relations un peu trop compliquées…

Thème : Aires et volumes

1. Prisme

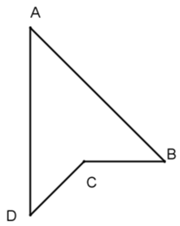
Les diagonales (voir le sens à donner à ce mot) d'un prisme droit dont la base est un hexagone régulier mesurent 12 et 13. Quel est le volume de ce prisme ?

2. Jouons au territoire



Sur le côté [CD] du parallélogramme ABCD, on place un point P. La parallèle à (DA) passant par P coupe la diagonale [AC] en Q. Les aires des triangles BQP et ABP sont respectivement 2 et 6.. Quelle est l'aire du triangle BCP ?

3. Pointe de flèche



Le quadrilatère ABCD possède trois angles de 45°, en A, B et D. La diagonale [AC] mesure 6. Quelle est l'aire du quadrilatère ?

4. Encore un découpage

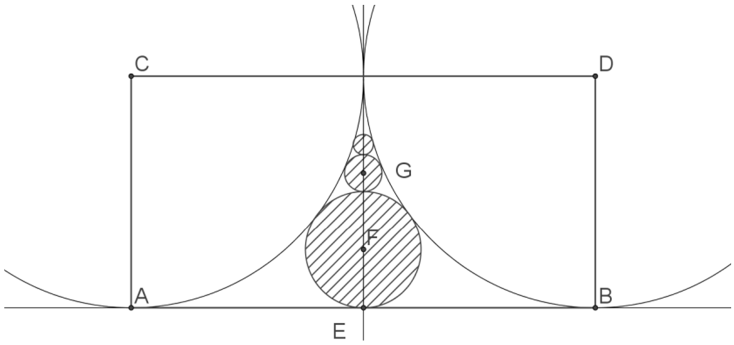
On considère un triangle ABC, le milieu D du côté [BC] et le milieu E de [AD]. La droite (BE) coupe [AC] en F. Quel est le rapport de l'aire du quadrilatère CDEF à celle du triangle ABC ?

5. Interstices

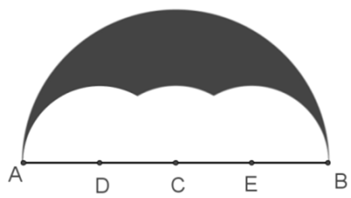
Les points ABCD sont les sommets d'un rectangle. Les cercles de centres C et D passant respectivement par A et B ont pour rayon 1 et sont tangents.

E est le milieu de [AB]. Sur la perpendiculaire à (AB) passant par E se succèdent les centres de cercles tangents aux deux cercles de départ et tangents deux à deux (le premier tangent à la droite (AB).

Quelle est l'aire grisée ?



6. Un reste de tarte



Trois demi-disques de rayon 1 ont entamé le disque de rayon 2. Quelle fraction de l'aire initiale reste-t-il ?

7. Ligne 13

Est-il possible de faire entrer deux tétraèdres réguliers solides de volume $\frac{1}{2}$ dans une sphère de rayon 1 ?

Thème : Combinatoire, dénombrement

1. Jackpot

1. Au casino, une machine accepte des jetons de deux couleurs : rouges ou verts. Pour miser, on introduit un jeton d'une des deux couleurs, la machine délivre alors cinq jetons de l'autre. Au départ, on vous donne un jeton. Si vous réussissez, en misant *ad libitum*, à posséder le même nombre de jetons des deux couleurs, vous gagnez.
Pouvez-vous gagner ?
2. La police des jeux poursuit le propriétaire du casino pour fraude. L'organisation change : la machine délivre six jetons au lieu de quatre, mais le nombre de parties qu'on peut jouer en une série est limité à 20. Pouvez-vous gagner ?

2. Illumination

12 lampes sont commandées par 12 interrupteurs. Au début du problème, elles sont toutes éteintes. Au cours d'une *manœuvre*, on peut actionner exactement cinq interrupteurs. Combien faut-il de manœuvres *au minimum* pour les allumer toutes ?

3. Cases à cocher

Remplir les cases de la séquence de calcul suivante avec des entiers naturels inférieurs ou égaux à 11 (non nécessairement distincts) de manière que le résultat du calcul soit un multiple de 11 :

$$A = \square \times \square + \square \times \square + 10$$

De combien de manières cela est-il possible ?

4. Milieu de tableau

Cete année, à mi-saison, une équipe de handball a gagné quelques matchs, fait deux fois match nul et concédé 3 défaites.
La seconde partie de la saison compte autant de matchs que la première partie. Si, dans la seconde moitié de la saison, elle aligne autant de victoires que de matchs nuls sans concéder de défaite, elle aura gagné la moitié de ses matchs sur l'ensemble de la saison.
Combien y a-t-il d'équipes dans ce championnat ?

5. Cellules grises

Les cases d'un échiquier de taille 10×10 sont coloriées en blanc, gris et noir. Deux cases qui ont un côté commun sont toujours de deux couleurs disctinctes. On sait qu'il y a 20 cases grises. Julie trouve qu'un rectangle 2×1 est *joli* s'il est composé d'une case blanche et d'une case noire.
1. Montrer que Julie pourra toujours découper dans l'échiquier au moins 30 jolis rectangles mais jamais plus de 40.
2. Proposer un coloriage permettant d'obtenir exactement 40 jolis rectangles.

6. Changer tout

Quand on inverse l'ordre des chiffres d'un nombre de quatre chiffres, on trouve parfois un nombre plus grand que le nombre de départ. Combien de nombres de quatre chiffres possèdent-ils cette propriété ?

Thème : Nombres

1. Nombres coquets
Un nombre de trois chiffres est dit *coquet* s'il est le produit de son chiffre des unités par un nombre formé avec ses deux autres chiffres. Par exemple $153 = 3 \times 51$. Quels sont les nombres *coquets* ?

2. 8 chiffres pour un multiple de 8
Les huit chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont aléatoirement permutés pour écrire un nombre entier de huit chiffres. Quelle est la probabilité que ce nombre soit un multiple de 8 ?

3. Sans retenue
Lorsqu'on additionne deux nombres entiers consécutifs compris entre 1 000 et 2 000, on doit parfois pendre en compte une retenue, parfois non. Combien de ces additions s'effectuent-elles sans retenue ?

4. Improbable résultat
Le quotient de deux entiers naturels p et q est 0, 123 456 789 … (les décimales, après la dixième, ne sont pas connues). Quelle est la plus petite valeur possible de q ?

5. Jamais le dimanche
Mon année de naissance comportait un seul dimanche tombant le 7 d'un mois. Peut-il y en avoir 2, 3, pas du tout ? En quel millésime ?

6. Philatélie
Dans un pays imaginaire les services postaux ont émis des timbres de valeurs faciales : 135, 136, 137, …, 142, 143, 144 (dans la monnaie locale).
Quelle est le plus GRAND affranchissement qui ne peut être réalisé avec ces vignettes (on peut naturellement utiliser plusieurs vignettes de même valeur) ?

Thème : Équations

1. Avant l'heure…

Nico veut arriver à l'heure à son rendez-vous. En partant, il calcule que s'il roule à la vitesse moyenne de 60 km/h, il sera en retard de 5 min, et que s'il roule à la vitesse moyenne de 80 km/h, il sera en avance de 5 min. Finalement, il arrive exactement à l'heure. Quelle a été sa vitesse moyenne ?

2. Dix sommes

L'ensemble $A = \{a, b, c, d, e\}$ est constitué de nombres relatifs tous différents et tels que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Lorsqu'on additionne ces nombres trois par trois, on obtient 10 (pourquoi 10 ?) sommes toutes différentes : 0, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 14 et 19. Quels sont les nombres a, b, c, d et e ?

3. Deux inconnues

Deux nombres a et b de somme non nulle sont tels que $\frac{a-b}{a+b} = 9$ et $\frac{ab}{a+b} = -60$. Combien valent a et b ?

4. Nouvelle opération

On définit une nouvelle opération, notée ◊, par :
Pour tous nombres a et b, $a \lozenge b = a + b - ab$
Trouver tous les triplets (x, y, z)tels que $(x \lozenge y) \lozenge z + (y \lozenge z) \lozenge x + (z \lozenge x) \lozenge y = 0$

5. Après 1 et 2, …

Deux nombres x et y sont tels que $x + y = 1$ et $x^2 + y^2 = 2$. Combien vaut $x^3 + y^3$? et $x^4 + y^4$?

6. Sommes et différences remarquables

- On donne $a = 5$. Trouver un entier b tel que $a^2 - b^2 = a + b$.
- Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 - b^2 = a + b = 13$?
- Prouver que s'il existe des entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = a + b = m$, alors m est impair

Pépinière Collège
Crytpographie

Correspondance Lettre/Entier

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Tableau de Vigenère

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

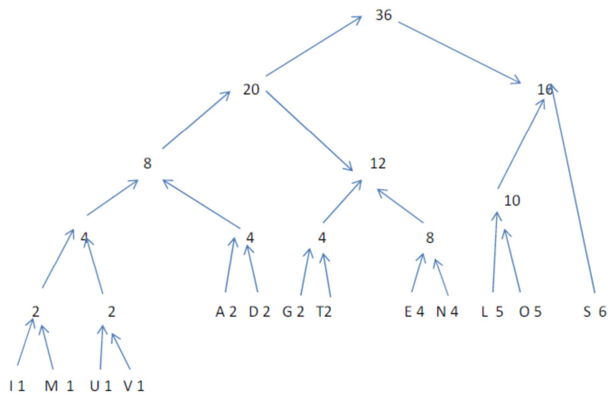
Thème cryptographie (complément)

1. Chanson d'automne (exemple de codage de Huffman)

Dans la cryptographie ancienne, il y a d'un côté un code, de l'autre des textes à coder avec ce code. Huffman (1952) propose une méthode – c'est plus une méthode de compression qu'une méthode de cryptage – unissant les deux. Exemple :

<table>
<tr><td rowspan="3">LES SANGLOTS LONGS
DES VIOLONS
DE L'AUTOMNE</td><td colspan="13">1. On compte les occurrences de chacune des lettres utilisées dans ces trois vers</td></tr>
<tr><td>A</td><td>D</td><td>E</td><td>G</td><td>I</td><td>L</td><td>M</td><td>N</td><td>O</td><td>S</td><td>T</td><td>U</td><td>V</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

2. On fabrique un arbre hiérarchique tenant compte du poids de chaque lettre dans la phrase



Les lettres ayant le plus faible nombre d'occurrences sont au bout des branches les plus longues, les lettres apparaissant souvent sont au bout des branches courtes. Chaque branche partant à gauche est notée 0, à droite 1. Voici le tableau de correspondance :

A	D	E	G	I	L	M
0010	0011	0110	0100	00000	100	00001
N	O	S	T	U	V	
0111	101	11	0101	00010	00011	

Les trois vers codés deviennent ainsi :

10001101111001001110100100101010111100101011 1010011
00110110110001100000101100101011111
00110110100001000010010110100001011 10110

N.B. On peut aussi attribuer un symbole particulier aux espaces, qui tienne compte de leur nombre.

Le gain de place est considérable : chaque lettre de l'alphabet peut être notée sur 5 bits (pourquoi ?). Ici, 4 sur 13 le sont, et ce sont les moins fréquentes. On passe de 180 bits (pourquoi ?) à …

Problème : on ne peut pas coder plusieurs textes avec le même code. Exemple : dans les lignes de code suivantes, trois lettres ne figurent pas dans le tableau précédent. On les a remplacées par **?** Pourrez-vous les retrouver ?

?10001101111011001110101000011010111**?**101011000010**?**
0011000100111011010000100111010000010011000010**?**
00001101011110101011010111 0110

2. INSEE (Exemple de code détecteur d'erreur)

Le Numéro d'inscription au registre (N.I.R.), plus connu sous le nom de Numéro I.N.S.E.E. ou Numéro de Sécurité sociale comporte 13 chiffres auxquels s'ajoute une clé à deux chiffres. Voici comment il est conçu :

Sexe	Année		Mois		Département		Commune			Numéro d'ordre		
1	**5**	**0**	**0**	**1**	**7**	**8**	**0**	**3**	**2**	**0**	**0**	**4**

Pour obtenir la clé, effectuer la division euclidienne du nombre de 13 chiffres par 97. Cela fait, prenez le complément à 97 de ce reste. Combien obtenez-vous ?

−M'sieur, M'dame, ma calculatrice n'affiche que douze chiffres et je ne sais plus comment on fait les divisions euclidiennes à la main…

−C'est très vilain pas beau d'avoir oublié, mais en ôtant d'un nombre de 13 chiffres 970 000 000 000 si ce nombre commence par 1 et 1 940 000 000 000 s'il commence par 2, on obtient un nombre de 12 chiffres qui a le même reste dans la division euclidienne par 97. Pourquoi ?

− Et si on ne sait plus très bien faire les soustractions ?...

La clé permet de révéler des erreurs dans la saisie des numéros (sur des formulaires, etc.)

3. G.P.S. (Un exemple de code *correcteur* d'erreur)

Vous donnez rendez-vous à un de vos correspondants, chercheur en mathématiques, dans le salon de l'Institut des hautes études scientifiques de Bures sur Yvette. Pour cela, vous lui communiquez les coordonnées G.P.S. de ce lieu. Bures sur Yvette est situé dans l'hémisphère Nord, à l'est du méridien origine. Votre correspondant le sait. Vous lui communiquez donc deux suites de trois nombres, représentant l'une la latitude Nord (en degrés, minutes, secondes), l'autre la longitude Est. Vous ajoutez chaque fois deux informations *redondantes*, la somme des trois nombres et le nombre obtenu en ajoutant le premier, deux fois le second et trois fois le troisième. Voici le message :

	Degrés	Minutes	Secondes	Somme 1	Somme 2
Latitude	**48**	**39**	**41**	**130**	**253**
Longitude	**5**	**10**	**9**	**21**	**49**

Vous avez commis une erreur de saisie dans la première ligne, et une dans la seconde. Quelles sont les bonnes coordonnées ?