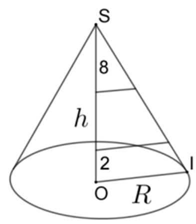
Aires et volumes

Exercice 1 Cône à l'endroit, cône à l'envers

Une bouteille a la forme d'un cône. Elle est posée sur sa base. Le niveau du liquide est à 8 cm du sommet. On retourne la bouteille (bien fermée). Le niveau du liquide est alors à 2 cm de la base. Quelle est la hauteur du cône ?

Appelons R le rayon du disque de base et h la hauteur du cône. Le rayon du disque épousant la surface du liquide lorsque la bouteille est posée sur sa base est donné par : $R_1 = R \times \frac{8}{h}$. Le rayon du disque épousant la surface du liquide lorsque la bouteille est maintenue à l'envers est donné par : $R_2 = R \times \frac{h-2}{h}$



L'égalité des volumes contenus dans les deux cas s'exprime ainsi :

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \left(\frac{h-2}{h}\right)^2 (h-2) = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{8R}{h}\right)^2 \times 8$$

Ou encore, après simplification :

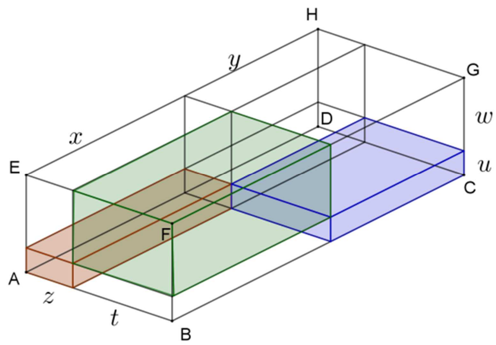
$$(h-2)^3 = h^3 - 8^3$$

Finalement : $h^2 - 2h - 84 = 0$

Bon, « on ne sait pas » résoudre les équations du second degré, surtout si on les appelle comme ça. Dans le cas qui nous occupe, le début $h^2 - 2h$ incite à écrire $(h-1)^2 = 85$ et, comme h est plus grand que 8, $h = 1 + \sqrt{85}$ (ce qui fait une hauteur un peu supérieure à 10 cm, c'est réaliste, pense-t-on. Cela fait quand même environ 10 cm de rayon – 20 cm de diamètre – et 10 cm de hauteur pour une bouteille contenant 1 litre de liquide…)

Exercice 2 Coups de scie

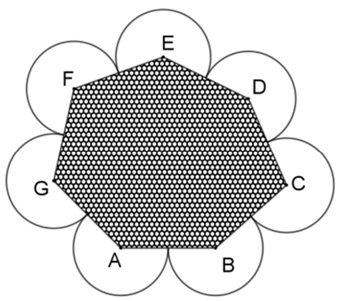
Le parallélépipède ABCDEFGH (l'emplacement des sommets est donné par la figure ci-contre) est coupé en huit parallélépipèdes plus petits par trois plans parallèles chacun à une des faces. Chacun de ces huit parallélépipèdes est désigné par la lettre minuscule qui correspond à la majuscule désignant le sommet originel qu'il contient. Leurs volumes sont mesurés dans une unité arbitraire, et on a : $V_a = 30, V_c = 300, V_f = 360, V_g = 90$. Quel est le volume du parallélépipède initial ?



Appelons a, b, c les dimensions du parallélépipède. Un coup de scie donné perpendiculairement à l'arête [AD], de longueur a, détermine deux segments de longueurs x et y. On écrira identiquement $z + t$ et $u + w$ pour les deux autres dimensions. On traduit l'énoncé par : $30 = xzu$, $300 = ytu$, $360 = xtw$, $90 = ytw$.

Si deux parallélépipèdes ont une face commune, leurs volumes sont dans le rapport de leurs troisièmes dimensions. On a donc : $\frac{V_g}{V_c} = \frac{w}{u}$ et donc $\frac{w}{u} = \frac{3}{10}$ (la figure a été réalisée avant ce calcul…) De même : $\frac{V_f}{V_g} = \frac{x}{y}$ et donc $\frac{x}{y} = 4$. On a aussi $\frac{z}{t} = \frac{V_a}{V_b} = \frac{30}{1\,200}$, car on a appliqué le résultat précédent. Et donc $\frac{z}{t} = \frac{1}{40}$.

Partant du (petit) parallélépipède de sommet A, on obtient le volume du grand en multipliant les dimensions du petit par le rapport d'agrandissement. Appelons V le volume cherché : $V = \frac{(x+y)(z+t)(u+w)}{xzu} \times 30$. Ou encore $V = \left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{t}{z}\right)\left(1 + \frac{w}{u}\right) \times 30$. Finalement $V = \left(1 + \frac{1}{4}\right)(1 + 40)\left(1 + \frac{3}{10}\right) \times 30 = 1\,998{,}75$ (ceux qui trouvent que ce résultat n'est pas joli ajouteront le volume de sciure pour faire 2 000…)

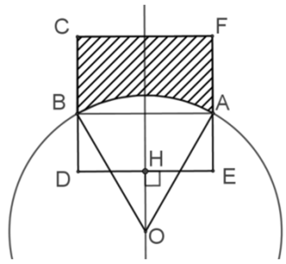


Exercice 3 Une jolie fleur

Le cœur de la « fleur » ci-contre est un heptagone ABCDEFG dont tous les côtés ont la même longueur, 2. Les bords des « pétales » sont des arcs de cercles centrés aux sommets de l'heptagone et dont les extrémités sont les milieux des côtés de l'heptagone. Quelle est l'aire totale des pétales ?

Les angles intérieurs d'un heptagone ont pour somme $5 \times 180°$ (on peut le découper en 5 triangles). C'est cette somme qu'il faut ôter aux $7 \times 180°$ des disques tous identiques pour trouver la surface restante, dont l'aire est donc celle de 2 disques de rayon 1, soit 2π.

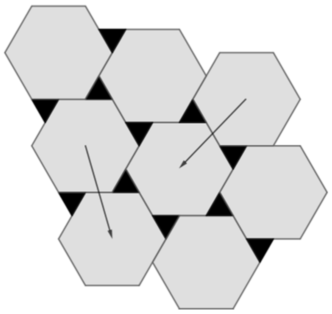
Exercice 4 Un carré qui dépasse



Le cercle de centre O et de rayon 2 rencontre en A et B les côtés [EF] et [CD] du carré CDEF, de côté 2. La médiatrice des côtés [DE] et [CF] passe par O. L'aire hachurée (celle de la partie du carré extérieure au disque) mesure 2. Quelle est la distance OH ?

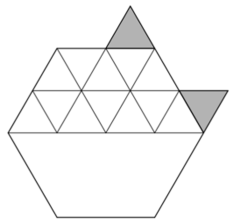
Le triangle OAB est équilatéral (le rayon du cercle et le côté du carré ont même mesure. L'angle en O mesure donc 60°, et le secteur circulaire limité par A et B a pour aire $\frac{1}{6}\pi \times 4$, soit $\frac{2}{3}\pi$. Il s'ensuit que le *segment circulaire* soutenu par la corde [AB] a pour aire $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{2}$, soit $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$. Le carré, d'aire 4, est décomposable en deux rectangles, ABDE et ABCF. Le rectangle ABCF a pour aire $2 + \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$. Le rectangle ABDE a donc pour aire $2 - \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$, et comme sa longueur est 2, sa largeur est $1 - \frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$. C'est cette largeur qu'il faut ôter à la hauteur du triangle équilatéral pour obtenir la distance OH : $\mathrm{OH} = \sqrt{3} - 1 + \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Finalement $\mathrm{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{3}\pi$.

Exercice 5 Carrelage



Des carreaux hexagonaux (clairs) et triangulaires (noirs) recouvrent le sol d'une pièce. Les hexagones et les triangles sont des polygones réguliers. Le côté des triangles mesure la moitié de celui des hexagones. Si le carrelage est étendu *ad libitum*, quelle est la proportion (le *ratio*) $\frac{surface\ noire}{surface\ claire}$? On pourra faire appel à des translations et dégager un motif élémentaire.

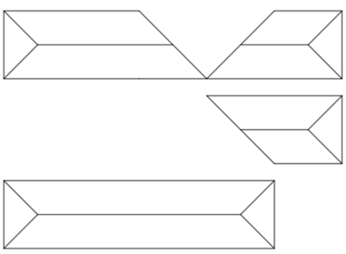
La figure fait apparaître deux translations conservant l'ensemble (supposé infini…) Le motif élémentaire est composé d'un hexagone auquel sont accolés deux triangles équilatéraux dont le côté mesure la moitié de celui de l'hexagone



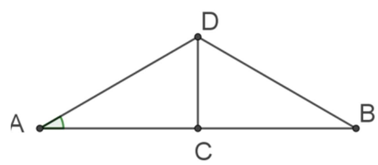
La figure ci-contre montre un motif, sur lequel les traits de construction montrent que l'aire de l'hexagone vaut 12 fois celle de la réunion des deux triangles équilatéraux.

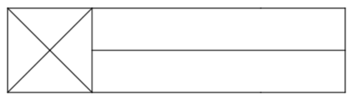
Exercice 6 Fortune immobilière

L'implantation au sol d'une maison a la forme d'un L, réalisé en accolant quatre carrés de côté 10 m. La hauteur du sol au bord du toit est également 10 m. Les six faces constituant le toit sont inclinées de 30° sur l'horizontale. Quel est le volume de cette maison ?



La figure de gauche montre qu'une partie de la maison peut être transformée par réflexion (il s'agit d'une réflexion par rapport à un plan…) en un solide de même volume. Nous avons à présent un parallélépipède de largeur 10, hauteur 10, longueur 30, surmonté du toit. La figure de droite montre montre que l'arête du toit est siuée à une hauteur $CD = \frac{5}{\sqrt{3}}$ par rapport à la face supérieure du parallélépipède. Le calcul s'applique aussi aux extrémités du toit, ce qui fait que, vu d'en haut, le solide a la forme suivante :

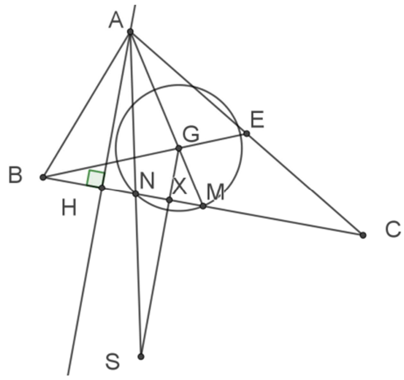




On a donc un parallélépipède de dimensions $10 \times 10 \times 40$, surmonté d'un prisme a base triangulaire d'aire $\frac{1}{2} \times \frac{5}{\sqrt{3}} \times 10$ et de hauteur 30 et d'une pyramide à base carrée d'aire 10×10 et de hauteur $\frac{5}{\sqrt{3}}$, donc de volume $\frac{1}{3} \times \frac{5}{\sqrt{3}} \times 10 \times 10$. Le volume total est donc $V = 4\,000 + \frac{750}{\sqrt{3}} + \frac{500}{3\sqrt{3}}$

Angles et distances

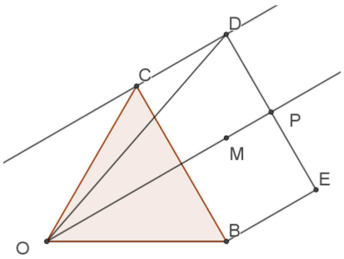
Exercice 1 Perpendiculaire compliquée



On considère un triangle acutangle ABC et son centre de gravité G. Le cercle de centre G passant par le milieu M de [BC] recoupe ce segment en N. Le point S étant le symétrique de A par rapport à N, montrer que la droite (GS) est perpendiculaire à (BC).

Appelons X le milieu du segment [MN]. (GX) est perpendiculaire à (BC), puisque le triangle GMN est isocèle. Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur (BC). Les triangles MGX et MAH sont en situation de Thalès et le rapport MG/Ma vaut 1/3, G étant le centre de gravité du triangle ABC. Comme MX = XN, on a aussi XN = NH. Les triangles ANH et SNX ont un sommet commun et deux côtés de même longueur portés par des droites issues de ce sommet commun. Ils sont donc isométriques et l'angle en X du triangle SNX est droit. G, X et S sont donc alignés, sur une perpendiculaire à (BC).

Exercice 2 Extension d'un hexagone



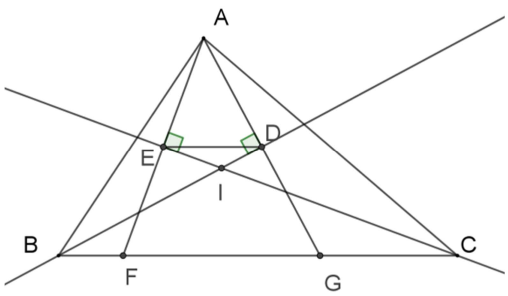
On considère un hexagone de côté a. Sur chacun des côtés de cet hexagone, on construit, vers l'extérieur, un rectangle de côtés a et b. Les sommets « extérieurs » de ces triangles sont situés sur un même cercle dont le centre est le centre de l'hexagone.

On considère à présent le cercle construit, avec le même procédé, à partir d'un hexagone de côté b et des rectangles de côtés b et a.

Les cercles obtenus ont-ils le même rayon ?

La figure reproduit un triangle équilatéral dont le côté est le rayon du cercle et un rectangle construit comme indiqué. Si le rayon du cercle est a, et P le milieu du segment [DE], le segment [OP] mesure $a\frac{\sqrt{3}}{2}+b$, le segment [DP] mesure $\frac{1}{2}a$. Le théorème de Pythagore (les collégiens italiens ont de la chance, là-bas on dit *Pitagora*, et *Talete*) permet d'affirmer que $\mathrm{OD}^2=\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}+b\right)^2+\frac{1}{4}a^2$. Une fois les simplifications d'écriture faites, $\mathrm{OD}^2=a^2+ab\sqrt{3}+b^2$. Il n'y a plus rien à faire : dans le second membre de cette égalité, a et b jouent des rôles symétriques, si on les échange, l'expression ne change pas.

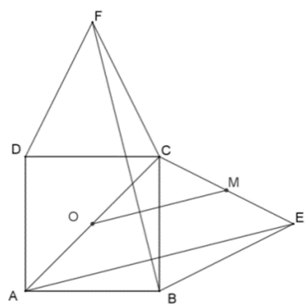
Exercice 3 Parallélisme



Dans le triangle ABC, les points D et E sont les projetés orthogonaux de A sur les bissectrices des angles en B et en C respectivement. Montrer que (DE) est parallèle à (BC).

Dans le triangle ACF, la bissectrice de l'angle en C est aussi hauteur relative au côté [AF]. Elle est donc aussi médiane relative à [AF]. E est donc le milieu de [AF]. Il en est de même pour D, milieu de [AG]. Dans le triangle AFG, la droite (DE) est donc droite des milieux, parallèle à (FG) (on peut aussi invoquer le théorème de Thales si on ne veut pas parler de droite des milieux).

Exercice 4 Tournez carré

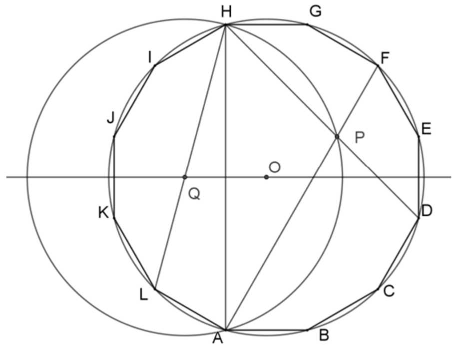


Sur les côtés [BC] et [CD] du carré ABCD, on construit les triangles isocèles BEC et CFD, superposables. On désigne par M le milieu de [CE] et par O le centre du carré. Montrer que les droites (OM) et (FB) sont perpendiculaires.

Il revient au même d'essayer de démontre que les droites (FB) et (AE) sont perpendiculaires, puisque (OM) est parallèle à (AE) (droite des milieux).

Les triangles ABE et BCF sont isométriques (les angles aux sommets B et C sont des sommes d'angles égaux, puisque les triangles isocèles sont superposables et les côtés adjacents sont respectivement de même longueur). Ces triangles sont image l'un de l'autre par la rotation de centre O et d'angle droit (on peut aussi utiliser l'argument des angles à côtés perpendiculaires). D'où l'orthogonalité.

Exercice 5 Dodécagone translaté



Le dodécagone régulier ABCDEFGHIJKL est inscrit dans le cercle de centre O et de rayon OA. Le point P est le point d'intersection des diagonales [DH] et [AF].

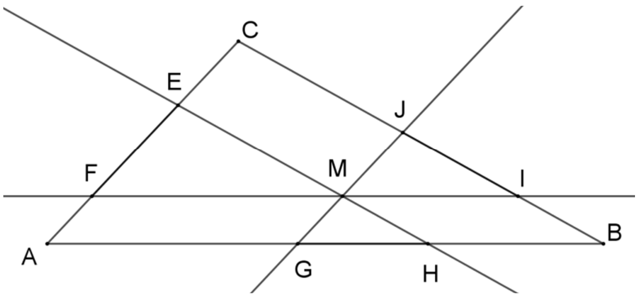
1. Montrer que le cercle circonscrit au triangle HAP a pour centre le point d'intersection Q de la diagonale [HL] avec la médiatrice de [JK] et pour rayon OA aussi.

2. En déduire que PE = AB.

1. Le cercle circonscrit au triangle HAP est centré sur la médiatrice de [HA], qui est aussi la médiatrice de [JK]. Observons les angles du triangle HPA. L'angle en H mesure 45° (la moitié de l'angle au centre qui intercepte l'arc $\widehat{\mathrm{AD}}$) et l'angle en A mesure 30° (la moitié de l'angle au centre qui intercepte l'arc $\widehat{\mathrm{HF}}$). L'angle en P mesure donc 105°. Dans le cercle circonscrit au triangle HAP, l'angle en P intercepte le grand arc $\widehat{\mathrm{HA}}$; le petit arc $\widehat{\mathrm{HA}}$ est donc intercepté par un angle au centre mesurant 150°. Si on appelle R le centre du cercle circonscrit au triangle HAP, l'angle $\widehat{\mathrm{HRO}}$ mesure donc 75°, et l'angle $\widehat{\mathrm{AHR}}$ mesure 15°. C'est ce que nous voulions prouver, 15° est la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AHL}}$. Donc le point R est le point Q.
En outre, en notant S l'intersection de [HA] et [OQ] on a : $\widehat{QSH} = \widehat{ASO} = 90°$; HS = SA et $\widehat{QHS} = \widehat{SAO} = 15°$ donc HQS et SAO sont isométriques et donc HQ=OA. Ainsi, les deux cercles ont le même rayon.

2. Le triangle HQO est isocèle, son angle au sommet mesure 30°. Ce triangle est superposable au triangle OAB, pr exemple, une des « parts » du dodécagone. Les cercles de centres O et Q sont image l'un de l'autre par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Le triangle HQP est équilatéral (il est isocèle et son angle en H mesure 60°), H étant un sommet du dodécagone translaté de ABCDEFGHIJKL par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, P en est un autre, c'est donc l'image de E.

Exercice 6 Découpages



Les côtés [AC], [CB] et [BA] du triangle ABC mesurent respectivement 2, 3 et 4. À partir du point M, intérieur au triangle, on a construit des parallèles aux côtés, qui déterminent sur ceux-ci des segments [EF], [GH] et [IJ] de même longueur. Quelle est cette longueur ?

Par construction, les angles correspondants $\widehat{ACB}$, $\widehat{FEM}$, $\widehat{MJI}$ et $\widehat{GMH}$ sont de même mesure. Et en raisonnant de même pour leurs autres angles, on démontre que les triangles ACB, FEM, MJI et GMH sont semblables.

Ainsi, il existe des réels α, β et γ tels que : $\begin{cases} FE = \alpha\, AC = 2\,\alpha \\ EM = \alpha\, BC = 3\,\alpha \\ FM = \alpha\, AB = 4\,\alpha \end{cases}$; $\begin{cases} MJ = 2\,\beta \\ JI = 3\,\beta \\ MI = 4\,\beta \end{cases}$ et $\begin{cases} MG = 2\,\gamma \\ MH = 3\,\gamma \\ GH = 4\,\gamma \end{cases}$

Or, $FE = JI = GH$ c'est-à-dire $2\,\alpha = 3\,\beta = 4\,\gamma$ donc $\begin{cases} \alpha = \frac{3}{2}\beta \\ \gamma = \frac{3}{4}\beta \end{cases}$

Par construction, AFMG et MIBH sont des parallélogrammes donc $AG = FM = 4\,\alpha$ et $HB = MI = 4\,\beta$. Comme les points A, G, H et B sont alignés dans cet ordre, on a $AB = AG + GH + HB$ c'est-à-dire $4 = 4\alpha + 4\gamma + 4\beta$
il vient donc $1 = \alpha + \gamma + \beta$ puis $1 = \frac{3}{2}\beta + \frac{3}{4}\beta + \beta$ donc $\beta = \frac{4}{13}$.
Ainsi, $JI = 3\,\beta = 3\,\times \frac{4}{13} = \frac{12}{13}$. On en déduit que la longueur cherchée est $\frac{12}{13}$

Dénombrement et probabilités

Exercice 1 Selfi…shness

Deux frères et leurs trois sœurs prennent la pose. Mais voilà que les garçons ne veulent pas être photographiés côte à côte… Combien de portraits différents peut-on réaliser dans ces conditions ?

Si on représente la scène comme un tableau à une ligne

1	2	3	4	5

On peut placer les frères en 1 et 3, 1 et 4, 1 et 5, 2 et 4, 2 et 5, 3 et 5, chacune de ces combinaisons devant être comptée deux fois, cela fait 12 combinaisons. Une fois les garçons placés, il reste trois places pour les sœurs ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA, soit 6 combinaisons. Au total, $6 \times 12 = 72$ façons de procéder.

Exercice 2 Un concours sélectif (2016)

Dans un concours de mathématiques, les concurrents s'opposent sur trois questions, dont chacune permet d'obtenir une note entière comprise entre 0 et 7. On observe qu'il n'existe aucune paire de candidats ayant obtenu la même note à **deux** exercices ((3, 4, 7) et (3, 2, 5) sont possibles, pas (3, 4, 7) et (3, 2, 7)). Combien y a-t-il eu de candidats, au maximum ?

Au maximum, les notes obtenues au premier exercice prennent toutes les valeurs comprises entre 0 et 7, et celles obtenues au second aussi. Tout couple « nouveau » est formé d'un entier compris entre 0 et 7 et d'un autre compris lui aussi entre 0 et 7. C'est un doublon. Le maximum de concurrents possible est inférieur à 64. Le tableau ci-contre est repéré par les scores possibles aux deux premiers exercices. Si on réussit à le remplir en inscrivant dans chaque case la note obtenue au troisième, que cette note soit différente de celle obtenue au premier et de celle obtenue au second, et on a trouvé une combinaison qui convient. Cela donne par exemple :

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

On vérifie qu'aucun triplet ainsi défini n'a deux coordonnées (on dit plutôt *projections*) identiques à celles d'un autre. Le maximum cherché est 64.

Exercice 3 Un nouveau jeu de solitaire (2010)

Au début du jeu, on dispose d'une suite de chiffres 0 ou 1. Le joueur a droit aux trois manipulations suivantes :

- Supprimer dans la suite une ou plusieurs séquences 11 ;
- Supprimer dans la suite une ou plusieurs séquence 000 ;
- Remplacer dans la suite une ou plusieurs séquences 01 par 100.

Le but du jeu est parvenir à une suite contenant 2 symboles ou moins.

Par exemple, si on part de la suite 10101010, on peut passer successivement à 110001010, 0001010, 1010, 110010, 0010, 01000, 01. Gagné.

Parmi les 1 024 suites de dix symboles, quelles sont celles avec lesquelles on ne peut pas gagner ?

Pour commencer, nus montrons que toute suite peut être réduite à la suite vide (il ne reste plus rien), à la suite constituée du seul 0, aux suites 10 et 00 ou à la suite 100. Pour cela regardons comment peuvent être réduites les suites de trois symboles :

000 disparaît toute seule, 001 donne 0100 puis 10000 puis 10, 010 donne 1000 puis 1, 100 pour l'instant rien, 011 donne 0, 101 donne 1100 puis 00, et enfin 110 donne 0. Toutes les suites de trois symboles, sauf 100, pouvant être réduites à 2 symboles ou moins, l'affirmation est correcte (si des symboles se trouvent à droite ou à gauche de 100, c'est avec ces symboles et le 10 de gauche ou le 10 de droite que se fait l'élimination).

Si une suite débute par un 0, ce qui la suit peut être réduit à la suite vide – il reste 0 – ou à 0 – reste 00 – ou 10 – 010 est transformé en 1 – ou 100 – 0100 donne 10000 donne 10. Donc elle est réductible à deux symboles ou moins.

Une suite commençant par « 1 » peut être écrite 111..11000…000 ou 111..11000…0001 ou réduite à ces formes. Dans le premier cas, un nombre pair de « 1 » disparaît ainsi qu'un nombre impair de « 0 » et on parvient à 2 symboles sauf dans le cas d'un nombre impair de « 1 » suivi de la somme de 2 de d'un multiple de 3 de « 0 », ou on parvient à 100. Dans le second cas, on traite le 01 final, remplacé par 100. La promotion du « 1 » vers la gauche s'arrête au moment où il voisine avec le dernier des « 1 » initiaux et on est ramené au cas précédent. Une seule suite de 10 symboles résiste : 1111100000.

Exercice 4 Coupe du monde maison

Ali, Ben, Caro et Dora jouent un « deux contre deux » dans le parc. Deux équipes de deux sont constituées, la première de deux attaquants, la seconde d'un défenseur et un gardien de but. Lorsqu'un but est marqué, le buteur devient gardien (les autres joueurs se répartissent les autres rôles comme ils le souhaitent).

Cet après-midi, Ali a été gardien 9 fois, Ben n'a pas joué gardien lors de 13 parties, Caro n'a pas été gardienne lors de 14 parties, Dora a joué 16 fois comme attaquante, quelques fois gardienne mais jamais défenseuse.

1. Combien de parties ont-ils disputées ?
2. Qui a marqué le but lors de la sixième partie ?

1. Rassemblons les données dans un tableau :

Nom	Gardien	Champ
Ali	9	x
Ben	y	13
Caro	$y-1$	14
Dora	$y-3$	16

Au total des parties, il y a eu $3y+5$ gardiens et $43+x$ joueurs de champ. $43+x$ est un multiple de 3 strictement supérieur à 48 (Dora a été 16 fois joueuses de champ).

Comme on a $9+x=13+y$, La seule solution possible est $x=8, y=4$.

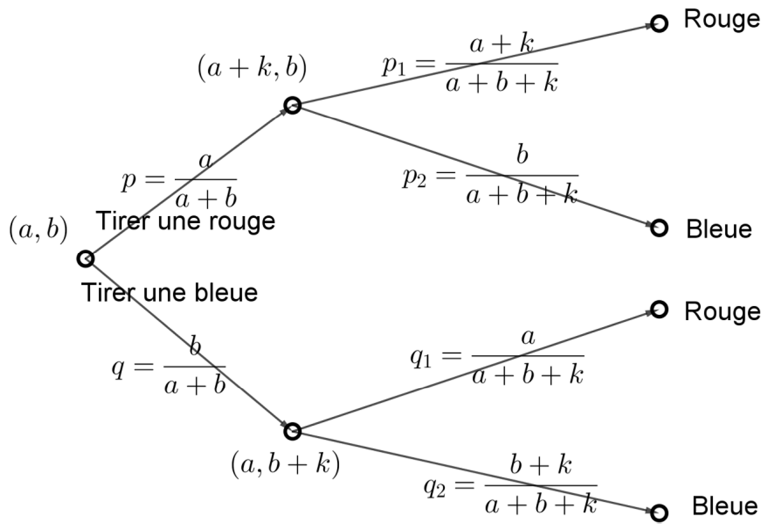
2. Il y a eu 17 parties et Ali, ayant été 9 fois gardien, a alterné les postes de gardien et attaquant, jouant gardien la première partie. C'est donc lui qui a marqué le but lors de la sixième partie.

Exercice 5 Jouons aux billes

On donne des entiers a, b et k.

a billes rouges et b billes bleues sont dans un sac. On tire au hasard une bille du sac et on note sa couleur. On la remet dans le sac, dans lequel on ajoute k billes de la même couleur, puis on tire une bille du sac. Quelle est la probabilité pour que cette bille soit bleue ? Cette probabilité dépend-elle de l'entier k ?

On représente ces tirages par un arbre.
On suit les branches en effectuant un produit à chaque nœud et une somme à chaque niveau :



La probabilité d'obtenir une boule rouge est donc $P=\frac{a}{a+b}\times\frac{a+k}{a+b+k}+\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b+k}$

Ce qui s'écrit aussi :

$$P=\frac{a(a+b+k)}{(a+b)(a+b+k)}$$

Finalement $P=\frac{a}{a+b}$

On trouvera de même que la probabilité de tirer *in fine* une boule bleue est $\frac{b}{a+b}$. Ces probabilités sont indépendantes de k.

Équations

Exercice 1 Une équation en nombres entiers

On donne un nombre entier n supérieur ou égal à 2. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} n = a + b - c \\ n = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases}$$

dont les inconnues sont les entiers a, b et c.

Montrer que ce système possède au moins une solution (une solution est un triplet (a, b, c) d'entiers) et en tous cas un ensemble fini de solutions.

De la première égalité, on tire $c = a + b - n$. On reporte ce résultat dans la seconde égalité, pour obtenir : $n = a^2 + b^2 - a^2 - b^2 + 2an + 2bn - 2ab - n^2$, ce qui peut aussi s'écrire : $2(a - n)(n - b) + n^2 = n$

D'où $2\ (a - n)(n - b) = n(1 - n)$. En remarquant que $n(n - 1)$ est nécessairement pair, on voit que le problème revient à écrire l'entier $\frac{n(n-1)}{2}$ comme le produit de deux entiers (ou le carré d'un entier). C'est possible au moins une fois en prenant un des facteurs égal à 1, et c'est possible un nombre fini de fois seulement (moins de n fois en comptant les permutations).

Exercice 2 « Aucun animal n'a été maltraité pour inventer cet exercice »

Brachycephalus ephippium est une espèce de grenouille, de très petite taille, dont les pattes arrière possèdent trois doigts et les pattes avant deux. La grenouille commune possède quant à elle cinq doigts aux pattes arrière et quatre aux pattes avant.

Dans un terrarium cohabitent des grenouilles des deux sortes, toutes possédant tous leurs membres. Un petit malin compte 122 doigts « arrière » et 92 doigts « avant ».

Combien y a-t-il d'amphibiens dans le terrarium ?

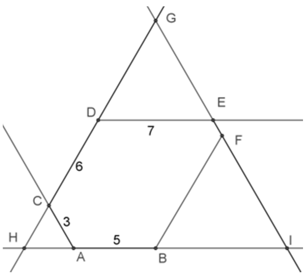
Appelons x le nombre (entier) de brachycephalus et y le nombre de grenouilles communes dans le terrarium. Le compte réalisé se traduit par : $\begin{cases} 122 = 2 \times 3 \times x + 2 \times 5 \times y \\ 92 = 2 \times 2 \times x + 2 \times 4 \times y \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} 61 = 3x + 5y \\ 23 = x + 2y \end{cases}$

En multipliant les deux membres de la deuxième égalité par 3, on obtient $69 = 3x + 6y$, d'où on déduit que $y = 8$ et $x = 7$

La démarche utilise des conditions nécessaires. On vérifie qu'elles sont suffisantes.

Exercice 3 Hexagone bancal

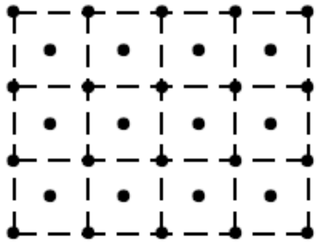
Un hexagone a tous ses angles de même mesure et quatre – consécutifs – de ses côtés ont pour longueurs 5, 3, 6 et 7. Combien mesurant les autres côtés ?



Dire que tous les angles ont la même mesure revient à dire qu'ils mesurent tous 120°. La figure est construite en plaçant les points A et B, puis C, puis D, puis E. Le point F est à l'intersection de deux droites, un côté d'un angle de 120° en E, un côté d'un angle de 120° en B. Les intersections des droites (AB) et (CD), (AB) et (EF), (CD) et (EF) respectivement, sont les sommets d'un triangle équilatéral HIG (le supplément de 120 à 180 est 60). Si on appelle x et y les mesures des segments [EF] et [BF], on a les égalités : $8 + y = 7 + x + y = 16$ (longueurs des trois côtés de HIG.

On trouve donc $y = 8$ et $x = 1$.

Exercice 4 Presque comme à Cordoue



Un édifice de base rectangulaire est hérissé de colonnes, comme dur le plan ci-contre : m travées et n rangées déterminent des espaces carrés aux sommets et au centre desquels s'élèvent ces colonnes.
Dans l'exemple présenté ci-contre, 4 travées et 3 rangées donnent 32 colonnes.
1. Est-il possible de trouver m et n de sorte que le nombre de colonnes soit 500 ?
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres k pour lesquels ce genre de disposition ne peut pas conduire à compter k colonnes.

1. Il y a $(m+1)(n+1)$ colonnes aux coins des carrés et $m \times n$ en leurs centres.
Au total il y a $2mn + m + n + 1$ colonnes. Observons que $4mn + 2m + 2n + 1 = (2m+1)(2n+1)$. Si on appelle N le nombre de colonnes, on a donc $2N - 1 = (2m+1)(2n+1)$
Dans le cas $N = 500$, on doit donc trouver m et n tels que $(2m+1)(2n+1) = 999$. Les couples de diviseurs de 999 de produit 999 sont : 1 et 999 (pas possible, compte tenu du problème posé), 3 et 333, 9 et 111, 27 et 37.
Reste à traduire ces résultats pour m et n.
2. Une telle exploration s'arrête immédiatement si $2N - 1$ est un nombre premier…

Exercice 5 Apprenti météorologue

Je me suis amusé à relever la température minimale dans ma ville entre le 15 décembre et le 11 janvier, et j'ai fait une constatation étonnante : chaque jour, pendant cette période (sauf le premier et le dernier, bien sûr), la température minimale était la somme de celle de la veille et de celle du lendemain. Le 15 décembre, la température minimale était 5 degrés, le 12 janvier, elle était 2 degrés.
1. Quelle était la température minimale le 2 janvier ?

J'ai établi une statistique analogue pour les mois de juillet et août et là, surprise, j'ai constaté qu'entre le 7 juillet et le 15 août, la température minimale était chaque jour la moyenne entre celle de la veille et celle du lendemain. Le 7 juillet, la température minimale était 12°, le 16 août elle était 32°.
2. Quelle était la température minimale le 1er août ?

Supposons que la température minimale soit x le 15 décembre et y le 17. Le tableau suivant dont son évolution les jours qui suivent :

date	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Temp.	x	$x+y$	y	$-x$	$-x-y$	$-y$	x	$x+y$	y

À la lecture de ce tableau, il apparaît que les mêmes températures sont observées sur un cycle de six jours. La température x est donc relevée le 15 décembre, le 21 décembre, le 27 décembre, le 2 janvier, le 8 janvier. Le 12 janvier, on mesure une température $-x-y$, ce qui conduit à $x = 5$, on le savait, et $y = -7$. Ce renseignement est inutile, la liste précédente contient le 2 janvier…

2. Si la température relevée un jour donné est la moyenne entre celle de la veille et celle du lendemain, c'est que l'écart d'un jour au suivant est le même. Du 7 juillet au 15 août, on compte 41 dates (et 40 intevalles…).
L'augmentation globale entre le 7 juillet et le 16 août étant 20°, la température minimale a augmenté de 0,5°par jour. Le 1[er] août, la température minimale était donc $12 + 25 \times 0{,}5 = 24{,}5$°

Nombres

Exercice 1 Diviseurs sans zéro

Parmi les nombres s'écrivant avec trois chiffres dans le système décimal de position, certains possèdent un 0 comme chiffre des dizaines ou des unités. À chacun des nombres de cet ensemble, on ôte un 0, pour obtenir un nombre s'écrivant avec deux chiffres. Dans quels cas obtient-on un diviseur du nombre initial ?

Si un tel nombre s'écrit avec deux zéros, par exemple 300, le nombre résultant de la suppression d'un de ces zéros est le quotient pas 10 du nombre initial. Il y a 9 nombres concernés.

Si un tel nombre ne possède qu'un zéro, final, le lui ôter revient à prendre son quotient par 10. Ce quotient est à prendre parmi la suite 10, 11, 12, …, 98, 99. Il y a donc 90 nombres de cette sorte, moins ceux qui ont été décomptés ci-dessus. Il revient au même de rester au total de 90.

Si le zéro est central, le nombre amputé a le même chiffre des unités que le nombre de départ. Par ailleurs, le quotient doit être strictement inférieur à 10, car $10 \times (10a + b) = 100a + 10b$, supérieur à $100a + b$.

Le chiffre des unités ne peut donc être que 2 (produit par 6), 4 (produit par 6), 5 (produit par 3, 5, 7 ou 9), 6 (produit par 6) ou 8 (produit par 6).

$105 = 7 \times 15, 405 = 9 \times 45, 108 = 6 \times 18$ s'ajoutent à la liste

Exercice 2 Additionnez-les, vous les reconnaîtrez

Des cinq nombres réels a, b, c, d et e, on sait que $a < b < c < d < e$ et que, des dix sommes obtenues en additionnant ces nombres deux à deux, les deux plus grandes sont 51 et 48 et les trois plus petites 32, 36 et 37. Quelles sont les valeurs possibles de e ?

Les deux plus grandes sommes sont $d + e = 51$ et $c + e = 48$, les deux plus petites $a + b = 32$ et $a + c = 36$.

On ne peut pour l'instant pas trancher entre $a + d$ et $b + c$ pour la troisième.

Ces résultats se traduisent notamment par : $d - c = 3$ et $c - b = 4$.

Si la troisième somme par ordre croissant est $a + d = 37$, cela conduit à $d - c = 1$, contradiction. Donc $b + c = 37$. Comme $c = b + 4$, on trouve $b = 16{,}5$. D'où vient $c = 20{,}5$, $d = 23{,}5$ et $a = 15{,}5$.

Finalement $e = 27{,}5$.

Exercice 3 Un long multiple de 7

Quel est le plus petit nombre entier s'écrivant dans le système décimal avec 2 018 chiffres et qui soit multiple de 7 ?

Toute suite de dix nombres entiers contient un multiple de 7. Nous cherchons donc un nombre N, dont le chiffre le plus à gauche est un 1, qui est suivi de 2 016 zéros et c'est le chiffre des unités qu'il nous faut trouver.

Lorsqu'on effectue la division de $100 \ldots . .0000$ par 7, on obtient la répétition de la suite 142857, qui correspond à la « descente » de six zéros dans l'opération posée. Pour 2 016 zéros, 336 apparitions de 142857 exactement. Le chiffre des unités est donc un zéro lui aussi.

Exercice 4 Un grand nombre premier

Il a été démontré que le nombre $\frac{10^{641}(10^{641}-1)}{9} + 1$ est un nombre premier. Combien ce nombre, écrit dans le système décimal, possède-t-il de chiffres, et quels sont ces chiffres ?

Le nombre $10^{641} - 1$ s'écrit avec 641 chiffres « 9 ». Son quotient par 9 s'écrit avec 641 chiffres « 1 ». Pour effectuer le produit par 10^{641}, on ajoute 641 « 0 » à droite, le dernier étant en fin d'opération remplacé par un « 1 ». Il y a donc 1 282 chiffres.

Exercice 5 Des nombres particuliers
Trois nombres entiers impairs a, b et c sont consécutifs si par exemple $c - b = b - a = 2$.
Dans la suite, un nombre entier est dit « particulier » si les chiffres de son écriture dans le système décimal sont tous identiques et s'il est la somme des carrés de trois entiers impairs consécutifs.
1. Quels sont les nombres « particuliers » de quatre chiffres ?
2. Existe-t-il des nombres particuliers de 2018 chiffres ?
1. Pour trois nombres impairs consécutifs donnés, il existe un entier n tel que ces nombres soient $2n - 3, 2n - 1$ et $2n + 1$. La somme des carrés de ces trois nombres est alors : $S_n = 12n^2 - 12n + 11$. Un nombre de quatre chiffres s'écrit $N = 11 \times 101 \times a$, où a est un chiffre. L'égalité $12n^2 - 12n + 11 = 11 \times 101 \times a$ peut être écrite : $12n^2 - 12n = 11 \times (101 \times a - 1)$, ce qui donne une première condition nécessaire $12n(n - 1)$ est un multiple de 11. Seules les valeurs 11, 12, 22 et 23 sont à examiner, les autres aboutissant à des nombres de plus de quatre chiffres. Finalement, 5 555 est le seul *nombre particulier* de quatre chiffres.
2. Observons que le chiffre des unités de $12n^2 - 12n + 11$ ne peut être que 1, 3 ou 5 ($n(n - 1)$ a pour chiffre des unités 0, 2, 6, $12n(n - 1)$a pour chiffre des unités 0, 4 ou 2…) Le nombre écrit avec 2 018 chiffres « 3 » est divisible par 3, ce qui n'est pas le cas de $12n^2 - 12n + 11$. Si on ôte 11 au nombre écrit avec 2 018 chiffres « 5 » , on obtient le nombre s'écrivant avec 2016 chiffres « 5 » suivis de 44. Le reste de la division par 3 de ce nombre est 2, donc il ne peut être multiple de 12. Reste le cas du nombre s'écrivant avec 2 018 chiffres « 1 ». Si on ôte 11 à ce nombre, on obtient le nombre s'écrivant avec 2 016 « 1 » et se terminant par deux « 0 ». Ce nombre devrait être multiple de $12n(n - 1)$), mais ce dernier est un multiple de 8, ce que ne sont pas le nombres se terminant par 100.
Il n'y a pas de solution.

Exercice 6 Des nombres qui montent ou qui descendent
Nous appellerons *nombre monotone* tout entier positif s'écrivant, dans le système décimal, avec au moins deux chiffres, dont aucun chiffre n'est 0 et tel que, en les énumérant de la gauche vers la droite, les chiffres soient de plus en plus grands (strictement) ou de plus en plus petits (strictement).
a. Quels sont les *nombres monotones* de cinq chiffres ?
b. Par combien de zéros se termine le plus petit multiple commun à tous les *nombres monotones* ?

a. 12 345, 12 346, 12 347, 12 348, 12 349, 12 356, 12 357, 12 358, 12 359, 12 367, 12 368, 12 369, 12 378, 12 379, 12 389, 12 456, 12 457, 12 458, 12 459, 12 467, 12 468, 12 469, 12 478, 12 479, 12 489, 12 567, 12 568, 12 569, 12 578, 12 579, 12 589, 12 678, 12 679, 12 689, 12 789 sont les premiers de la liste, pour ce qui est des *nombres monotones « croissants ».*
Combien y a-t-il de nombres monotones croissants de cinq chiffres ? Il y en autant que de façons de choisir ces cinq chiffres parmi les neuf possibles. Ce choix fait, il n'y a plus qu'à les classer dans l'ordre, c'est la même chose pour les « décroissants ». On a donc $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ quintuplets possibles, mais chaque nombre monotone croissant est associé à $5 \times 4 \times 3 \times 2$ quintuplets. Finalement, il y a $\frac{9\times8\times7\times6\times5}{5\times4\times3\times2} = 126$ nombres monotones croissants de cinq chiffres. Il y en a aussi 126 décroissants, les croissants et les décroissants allant par paire, de somme $111\ 110$ (pour chaque croissant, le décroissant s'écrit avec les chiffres compléments à 10 des siens).
Au total, la somme des nombres monotones de cinq chiffres est $126 \times 111\ 110 = 13\ 999\ 860$.
b. N'ayons pas peur de l'infini : les nombres monotones ont au plus 9 chiffres, donc ils sont en nombre fini.
Dire que le plus petit multiple commun à tous ces nombres se termine par n « 0 », c'est dire que ce nombre et un multiple de 10^n, donc un multiple de 5^n et de 2^n (si on trouve qu'il est multiple de la puissance p-ième de 5 et de la puissance q-ième de 2, on retiendra le plus petit de p et q …)
Le nombre 125 est un nombre monotone et c'est le cube de 5. Les multiples de 125 se terminent par 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. Dans cette liste, seuls 125 et 875 sont des nombres monotones ou peuvent terminer l'écriture d'un nombre monotone. Le seul monotone à ajouter à la liste serait 9 875. On en reste donc à la puissance 3 et comme par exemple $2^4 = 16$ est un nombre monotone, on s'arrête à trois. Le plus petit multiple commun à tous les nombres monotones se termine par trois « 0 » et pas davantage.