Pépinière académique de mathématiques
Stage des 22 et 23 octobre 2018

« Quand mon père était fonctionnaire de Pise à la douane de Bougie pour y aider les marchands pisans qui la fréquentaient, il me fit venir à lui alors que j'étais adolescent ; et dans l'intention de m'assurer un futur utile et commode, il voulut que j'y restasse quelques jours et qu'on m'enseignât le calcul. Là, introduit par un enseignement admirable dans l'art des neuf chiffres indiens, j'ai aimé cette science bien plus que tout le reste… »

[Ceci est le commencement] du *livre du calcul*, rédigé par Léonard, fils de Bonaccio, Pisan, en l'an 1202

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le siège d'INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée de la Vallée de Chevreuse de Gif sur Yvette, le collège Jean-Philippe Rameau de Versailles, le lycée La Bruyère de Versailles et, cette année, le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (IPR honoraire), Vincent PANTALONI, Évelyne ROUDNEFF, Jean-François REMETTER, Christine WEILL
Les responsables des établissements d'accueil : Caroline TALLEC, Principale du collège Paul Fort, Bernard POIGT, Proviseur du lycée Camille Pissarro, Guy SEGUIN, Proviseur du lycée Hoche.
Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Jérôme CERISIER (Lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Alfred Kastler, Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sébastien PORCHER (Collège Jacqueline Auriol, BOULOGNE BILLANCOURT), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Carine SIMONDET (Lycée Maurice Genevoix, MONTROUGE), Martine ZNATY (Collège Les Hauts Grillets, SAINT GERMAIN EN LAYE)
Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves

Programme du stage des 22 et 23 octobre 2018

<table>
<tr><th>Montlhéry</th><th>Pontoise 1</th><th>Pontoise 2</th><th>Versailles 1</th><th>Versailles 2</th><th>Versailles 3</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Nombres
N. Fixot</td><td rowspan="2">Dénombrement
Probabilités
O. Delassus</td><td rowspan="2">Angles et
distances
C. Houard</td><td colspan="3">Film</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11.
Équations
C. Simondet</td><td rowspan="2">Aires et
volumes
M. Znaty</td><td rowspan="2">Dénombrement
Probabilités
C. Deguil</td></tr>
<tr><td>Repas</td><td colspan="2">11.45 Repas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Angles et distances
N. Fixot</td><td rowspan="2">12.30
Nombres
K. Renard</td><td rowspan="2">Dénombrement
Probabilités
O. Delassus</td><td colspan="3">12.30
Repas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">13.15
Dénombrement
Probabilités
C. Deguil</td><td rowspan="2">Équations
C. Simondet</td><td rowspan="2">Aires et
volumes
M. Znaty</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dénombrement
Probabilités
C. Weill</td><td rowspan="2">14.15
Angles et
distances
C. Houard</td><td rowspan="2">Nombres
K. Renard</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15.
Aires et
volumes
M. Znaty</td><td rowspan="2">Dénombrement
Probabilités
C. Deguil</td><td rowspan="2">Équations
C. Simondet</td></tr>
<tr><td>Exposé</td><td colspan="2">Film</td></tr>
</table>

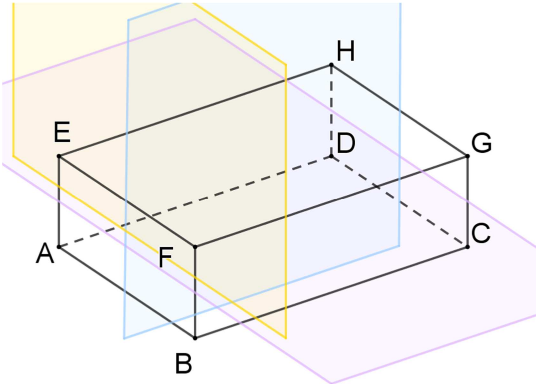
<table>
<tr><th colspan="6">Mardi 23 octobre</th></tr>
<tr><th>Montlhéry</th><th>Pontoise 1</th><th>Pontoise 2</th><th>Versailles 1</th><th>Versailles 2</th><th>Versailles 3</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Aires et
volumes
X. Gabilly</td><td rowspan="2">Équations
B. Baudin</td><td rowspan="2">Aires
et volumes
C. Houard</td><td colspan="3">Exposé</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Angles et
distances
J. Cerisier</td><td rowspan="2">Nombres
S. Porcher</td><td rowspan="2">Rallye
M. Salmon
C. Deguil</td></tr>
<tr><td>Repas</td><td colspan="2">11.45 Repas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Équations
J. Déat</td><td rowspan="2">12.30
Aires
et volumes
C. Houard</td><td rowspan="2">Équations
B. Baudin</td><td colspan="3">Repas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rallye
M. Salmon
C. Deguil</td><td rowspan="2">Angles et
distances
J. Cerisier</td><td rowspan="2">Nombres
S. Porcher</td></tr>
<tr><td>Film</td><td colspan="2" rowspan="2">14.15
Rallye
C. Houard et B. Baudin</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rallye
J. Déat et
X. Gabilly</td><td rowspan="2">Nombres
S. Porcher</td><td rowspan="2">Rallye
M. Salmon
C. Deguil</td><td rowspan="2">Angles et
distances
J. Cerisier</td></tr>
<tr><td colspan="2">15.30
Exposé</td></tr>
</table>

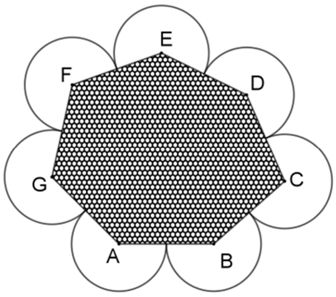
Attention : les horaires sont propres à chaque centre. La seule obligation est de débuter à 10 heures et terminer à 16 h 30.

Thème : Aires et volumes

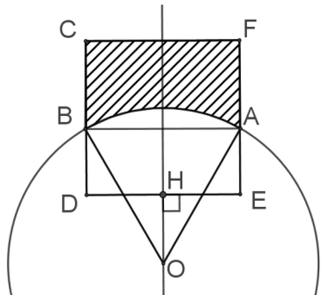
Exercice 1 Cône à l'endroit, cône à l'envers
Une bouteille a la forme d'un cône. Elle est posée sur sa base. Le niveau du liquide est à 8 cm du sommet. On retourne la bouteille (bien fermée). Le niveau du liquide est alors à 2 cm de la base. Quelle est la hauteur du cône ?

Exercice 2 Coups de scie
Le parallélépipède ABCDEFGH (l'emplacement des sommets est donné par la figure ci-contre) est coupé en huit parallélépipèdes plus petits par trois plans parallèles chacun à une des faces. Chacun de ces huit parallélépipèdes est désigné par la lettre minuscule qui correspond à la majuscule désignant le sommet originel qu'il contient. Leurs volumes sont mesurés dans une unité arbitraire, et on a : $V_a = 30, V_c = 300, V_f = 360, V_g = 90$. Quel est le volume du parallélépipède initial ?



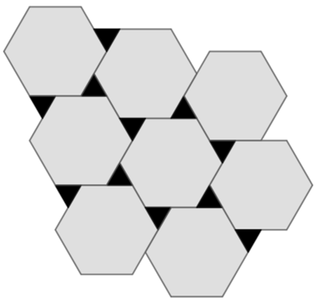


Exercice 3 Une jolie fleur
Le cœur de la « fleur » ci-contre est un heptagone ABCDEFG dont tous les côtés ont la même longueur, 2. Les bords des « pétales » sont des arcs de cercles centrés aux sommets de l'heptagone et dont les extrémités sont les milieux des côtés de l'heptagone. Quelle est l'aire totale des pétales ?

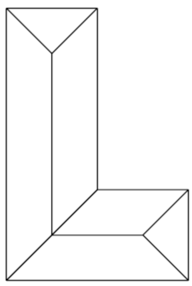


Exercice 4 Un carré qui dépasse
Le cercle de centre O et de rayon 2 rencontre en A et B les côtés [EF] et [CD] du carré CDEF, de côté 2. La médiatrice des côtés [DE] et [CF] passe par O. L'aire hachurée (celle de la partie du carré extérieure au disque) mesure 2. Quelle est la distance OH ?

Exercice 5 Carrelage

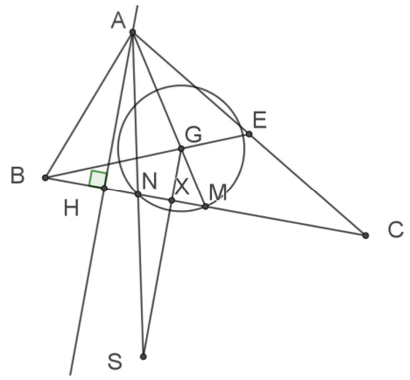


Des carreaux hexagonaux (clairs) et triangulaires (noirs) recouvrent le sol d'une pièce. Les hexagones et les triangles sont des polygones réguliers. Le côté des triangles mesure la moitié de celui des hexagones. Si le carrelage est étendu *ad libitum*, quelle est la proportion (le *ratio*) $\frac{surface\ noire}{surface\ claire}$? On pourra faire appel à des translations et dégager un motif élémentaire.



Exercice 6 Fortune immobilière
L'implantation au sol d'une maison a la forme d'un L, réalisé en accolant quatre carrés de côté 10 m. La hauteur du sol au bord du toit est également 10 m. Les six faces constituant le toit sont inclinées de 30° sur l'horizontale. Quel est le volume de cette maison ?

Thème : Angles et distances

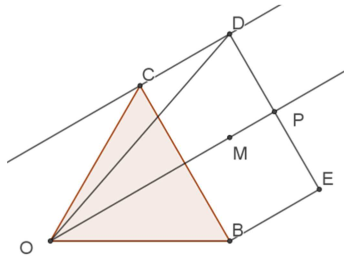


Exercice 1 Perpendiculaire compliquée

On considère un triangle acutangle ABC et son centre de gravité G. Le cercle de centre G passant par le milieu M de [BC] recoupe ce segment en N. Le point S étant le symétrique de A par rapport à N, montrer que la droite (GS) est perpendiculaire à (BC).

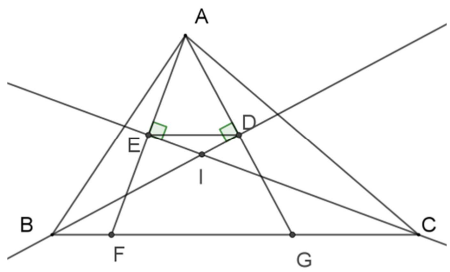
Exercice 2 Extension d'un hexagone

On considère un hexagone de côté a. Sur chacun des côtés de cet hexagone, on construit, vers l'extérieur, un rectangle de côtés a et b. Les sommets « extérieurs » de ces rectangles sont situés sur un même cercle dont le centre est le centre de l'hexagone.



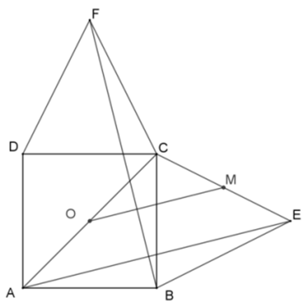
On considère à présent le cercle construit, avec le même procédé, à partir d'un hexagone de côté b et des rectangles de côtés b et a.

Les cercles obtenus ont-ils le même rayon ?



Exercice 3 Parallélisme

Dans le triangle ABC, les points D et E sont les projetés orthogonaux de A sur les bissectrices des angles en B et en C respectivement. Montrer que (DE) est parallèle à (BC).

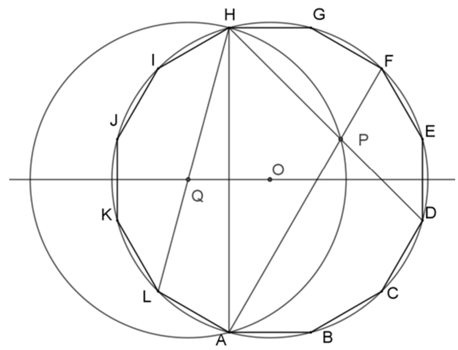


Exercice 4 Tournez carré

Sur les côtés [BC] et [CD] du carré ABCD, on construit les triangles isocèles BEC et CFD, superposables. On désigne par M le milieu de [CE] et par O le centre du carré. Montrer que les droites (OM) et (FB) sont perpendiculaires.

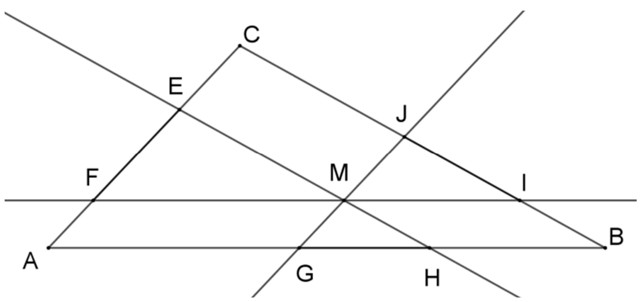
Exercice 5 Dodécagone translaté

Le dodécagone régulier ABCDEFGHIJKL est inscrit dans le cercle de centre O et de rayon OA. Le point P est le point d'intersection des diagonales [DH] et [AF].



1. Montrer que le cercle circonscrit au triangle HAP a pour centre le point d'intersection Q de la diagonale [HL] avec la médiatrice de [JK] et pour rayon OA aussi.
2. En déduire que PE = AB.

Exercice 6 Découpages



Les côtés [AC], [CB] et [BA] du triangle ABC mesurent respectivement 2, 3 et 4. À partir du point M, intérieur au triangle, on a construit des parallèles aux côtés, qui déterminent sur ceux-ci des segments [EF], [GH] et [IJ] de même longueur. Quelle est cette longueur ?

Thème : Dénombrement et probabilités

Exercice 1 Selfi…shness
Deux frères et leurs trois sœurs prennent la pose. Mais voilà que les garçons ne veulent pas être photographiés côte à côte… Combien de portraits différents peut-on réaliser dans ces conditions ?

Exercice 2 Un concours sélectif
Dans un concours de mathématiques, les concurrents s'opposent sur trois questions, dont chacune permet d'obtenir une note entière comprise entre 0 et 7. On observe qu'il n'existe aucune paire de candidats ayant obtenu la même note à **deux** exercices ((3, 4, 7) et (3, 2, 5) sont possibles, pas (3, 4, 7) et (3, 2, 7)). Combien y a-t-il eu de candidats, au maximum ?

Exercice 3 Un nouveau jeu de solitaire
Au début du jeu, on dispose d'une suite de chiffres 0 ou 1. Le joueur a droit aux trois manipulations suivantes :

- Supprimer dans la suite une ou plusieurs séquences 11 ;
- Supprimer dans la suite une ou plusieurs séquences 000 ;
- Remplacer dans la suite une ou plusieurs séquences 01 par 100.

Le but du jeu est parvenir à une suite contenant 2 symboles ou moins.
Par exemple, si on part de la suite 10101010, on peut passer successivement à 110001010, 0001010, 1010, 110010, 0010, 01000, 01. Gagné.

Parmi les 1 024 suites de dix symboles, quelles sont celles avec lesquelles on ne peut pas gagner ?

Exercice 4 Coupe du monde maison
Ali, Ben, Caro et Dora jouent un « deux contre deux » dans le parc. Deux équipes de deux sont constituées, la première de deux attaquants, la seconde d'un défenseur et un gardien de but. Lorsqu'un but est marqué, le buteur devient gardien (les autres joueurs se répartissent les autres rôles comme ils le souhaitent).
Cet après-midi, Ali a été gardien 9 fois, Ben n'a pas joué gardien lors de 13 parties, Caro n'a pas été gardienne lors de 14 parties, Dora a joué 16 fois comme attaquante, quelques fois gardienne mais jamais défenseuse.
1. Combien de parties ont-ils disputées ?
2. Qui a marqué le but lors de la sixième partie ?

Exercice 5 Jouons aux billes
On donne des entiers a, b et k.
a billes rouges et b billes bleues sont dans un sac. On tire au hasard une bille du sac et on note sa couleur. On la remet dans le sac, dans lequel on ajoute k billes de la même couleur, puis on tire une bille du sac. Quelle est la probabilité pour que cette bille soit bleue ? Cette probabilité dépend-elle de l'entier k ?

Thème : Équations

Exercice 1 Une équation en nombres entiers
On donne un nombre entier n supérieur ou égal à 2. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} n = a + b - c \\ n = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases}$$

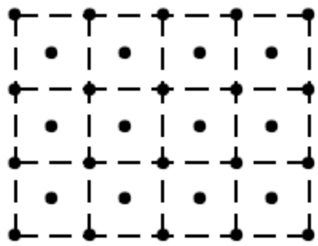
dont les inconnues sont les entiers a, b et c.
Montrer que ce système possède au moins une solution (une solution est un triplet (a, b, c) d'entiers) et en tous cas un ensemble fini de solutions.

Exercice 2 « Aucun animal n'a été maltraité pour inventer cet exercice »

Brachycephalus ephippium est une espèce de grenouille, de très petite taille, dont les pattes arrière possèdent trois doigts et les pattes avant deux. La grenouille commune possède quant à elle cinq doigts aux pattes arrière et quatre aux pattes avant.
Dans un terrarium cohabitent des grenouilles des deux sortes, toutes possédant tous leurs membres. Un petit malin compte 122 doigts « arrière » et 92 doigts « avant ».
Combien y a-t-il d'amphibiens dans le terrarium ?

Exercice 3 Hexagone bancal
Un hexagone a tous ses angles de même mesure et quatre – consécutifs – de ses côtés ont pour longueurs 5, 3, 6 et 7. Combien mesurant les autres côtés ?

Exercice 4 Presque comme à Cordoue



Un édifice de base rectangulaire est hérissé de colonnes, comme dur le plan ci-contre : m travées et n rangées carrées déterminent des espaces carrés aux sommets et au centre desquels s'élèvent ces colonnes.
Dans l'exemple présenté ci-contre, 4 travées et 3 rangées donnent 32 colonnes.
1. Est-il possible de trouver m et n de sorte que le nombre de colonnes soit 500 ?
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres k pour lesquels ce genre de disposition ne peut pas conduire à compter k colonnes.

Exercice 5 Apprenti météorologue
Je me suis amusé à relever la température minimale dans ma ville entre le 15 décembre et le 11 janvier, et j'ai fait une constatation étonnante : chaque jour, pendant cette période (sauf le premier et le dernier, bien sûr), la température minimale était la somme de celle de la veille et de celle du lendemain. Le 15 décembre, la température minimale était 5 degrés, le 12 janvier, elle était 2 degrés.
1. Quelle était la température minimale le 2 janvier ?

J'ai établi une statistique analogue pour les mois de juillet et août et là, surprise, j'ai constaté qu'entre le 7 juillet et le 15 août, la température minimale était chaque jour la moyenne entre celle de la veille et celle du lendemain.
Le 7 juillet, la température minimale était 12°, le 16 août elle était 32°.
2. Quelle était la température minimale le 1[er] août ?

Thèmes : Nombres

Exercice 1 Diviseurs sans zéro
Parmi les nombres s'écrivant avec trois chiffres dans le système décimal de position, certains possèdent un 0 comme chiffre des dizaines ou des unités. À chacun des nombres de cet ensemble, on ôte un 0, pour obtenir un nombre s'écrivant avec deux chiffres. Dans quels cas obtient-on un diviseur du nombre initial ?

Exercice 2 Additionnez-les, vous les reconnaîtrez
Des cinq nombres réels a, b, c, d et e, on sait que $a < b < c < d < e$ et que, des dix sommes obtenues en additionnant ces nombres deux à deux, les deux plus grandes sont 51 et 48 et les trois plus petites 32, 36 et 37. Quelles sont les valeurs possibles de e ?

Exercice 3 Un long multiple de 7
Quel est le plus petit nombre entier s'écrivant dans le système décimal avec 2 018 chiffres et qui soit multiple de 7 ?

Exercice 4 Un grand nombre premier
Il a été démontré que le nombre $\frac{10^{641}\left(10^{641}-1\right)}{9}+1$ est un nombre premier. Combien ce nombre, écrit dans le système décimal, possède-t-il de chiffres, et quels sont ces chiffres ?

Exercice 5 Des nombres particuliers
Trois nombres entiers impairs a, b et c sont consécutifs si par exemple $c - b = b - a = 2$.
Dans la suite, un nombre entier est dit « particulier » si les chiffres de son écriture dans le système décimal sont tous identiques et si il est la somme des carrés de trois entiers impairs consécutifs.
1. Quels sont les nombres « particuliers » de quatre chiffres ?
2. Existe-t-il des nombres particuliers de 2018 chiffres ?

Exercice 6 Des nombres qui montent ou qui descendent
Nous appellerons *nombre monotone* tout entier positif s'écrivant, dans le système décimal, avec au moins deux chiffres, dont aucun chiffre n'est 0 et tel que, en les énumérant de la gauche vers la droite, les chiffres soient de plus en plus grands (strictement) ou de plus en plus petits (strictement).
a. Quels sont les *nombres monotones* de cinq chiffres ?
b. Par combien de zéros se termine le plus petit multiple commun à tous les *nombres monotones* ?