ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 1**

Parution lundi 8 novembre **Retour attendu pour le lundi 22 novembre**

Exercice n°1 … de l'origine des inégalités

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.
Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.
Soit a, b, c et d des nombres réels.
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$
soit $(b + c) \geq (a + c)$)
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$.
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$.
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

Démontrer la deuxième partie du théorème 1 ainsi que les théorèmes 2 et 3.

Exercice 2 Encadrements

On considère un rectangle de largeur l et de longueur L. On sait que $9{,}99 \leq l \leq 10{,}01$ et $19{,}99 \leq L \leq 20{,}01$.
a. Trouver un encadrement du périmètre P du rectangle. Traduire cet encadrement par l'appartenance à un intervalle du type $[a - r, a + r]$.
Préciser l'amplitude de cet encadrement.
b. Trouver de même un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle. Préciser l'amplitude de cet encadrement.
Peut-on en déduire que $199{,}7 \leq \mathcal{A} \leq 200{,}3$?

Exercice 3 Multiples et diviseurs

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices, il vaut mieux se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
On admettra le théorème suivant :
Théorème : Si un nombre est multiple de plusieurs nombres premiers distincts alors il est multiple du produit de ces nombres premiers.

Théorème (division euclidienne) : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

a. Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.
b. Montrer que si l'écriture décimale d'un nombre A est $\overline{xy}$ et celle d'un nombre B est $\overline{yx}$ alors le nombre $A + B$ est divisible par 11.
c. Montrer que si l'écriture décimale d'un nombre A est $\overline{cdu}$ et si $c + d + u = 9$ alors le nombre A est divisible par 9.
d. Montrer que pour tous nombres entiers a et b, le produit $ab(a^2 - b^2)$ est un multiple de 3.
(on pourra étudier les restes dans les divisions euclidiennes de a et b par 3).
e. Montrer que pour tout entier n, $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 2 et par 3.
f. Montrer que le produit de trois nombres pairs consécutifs est un multiple de 48.

Exercice 4 Développement décimal d'un nombre rationnel

Propriété : soit a et b deux entiers tels que $b \neq 0$. Le développement décimal du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est fini (nombre décimal) ou infini mais périodique à partir d'un certain rang.

On peut procéder par divisions euclidiennes successives :

$a = bq_0 + r_0$ et $r_0 < b$, $10r_0 = bq_1 + r_1$ et $r_1 < b$, $10r_1 = bq_2 + r_2$ et $r_2 < b$, $10r_2 = bq_3 + r_3$ et $r_3 < b$, …

Alors $\frac{a}{b} = q_0, q_1 q_2 q_3 \dots$.

a. Expliquer pourquoi il suffit de connaitre le développement décimal de $\frac{22}{7}$ jusqu'à la 7e décimale pour connaitre entièrement ce développement décimal. Déterminer la période « à la main ».

b. Combien de décimales au maximum suffit-il de calculer pour connaitre le développement décimal de $\frac{43}{13}$?

Exercice 5 Racines carrées

Théorème : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** a et b :

- $\sqrt{a^2} = a$;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. En particulier $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ce théorème est à la base de tous les calculs sur les racines carrées.

1. Montrer que pour tous réels positifs ou nuls x, y, on a $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.
En déduire que pour tous réels positifs ou nuls x, y, z, on a $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.

2. Montrer que pour tout $k \in \{1,2,3,4,5\}$, il existe un entier n tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^k = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.

3. ***a.*** Montrer que pour tout entier n, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

b. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, comparer $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$.

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$.