ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 — **Stage « filé »**

Classe de seconde — **Fiche numéro 3**

Parution vendredi 11 février — **Retour attendu pour le lundi 16 mars**

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- Le milieu I d'un segment $[AB]$ est caractérisé par l'une des égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou, pour un point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

- La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points.
- L'égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
- La relation de Chasles facilite les calculs.

Exercice 1 Un bon positionnement

Soit ABCD un quadrilatère. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

a. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

On suppose désormais que le quadrilatère ABCD est un trapèze de bases [BC] et [AD]. On note K et L les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

b. Justifier l'existence d'un réel x tel que $\overrightarrow{BC} = \mathrm{x}\overrightarrow{AD}$.

c. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AD}$.

d. En déduire la valeur de x pour laquelle on a $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KJ}$.

Exercice 2 Un alignement particulier

Soit ABCD un parallélogramme et soit M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. On note P le symétrique du point B par rapport à C.

a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Que représente le point N pour le segment [MP] ?

Exercice 3 Alignement et colinéarité

Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ sont tels que OI = OJ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

<u>Définition :</u> on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

<u>Théorème :</u> dans le plan muni d'un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

<u>Définition :</u> dans le plan muni d'un repère orthonormé, le déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le nombre $dét(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

L'introduction d'un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s'appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

1. <u>Démonstration du théorème</u>

   a. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires alors $xy' - x'y = 0$.

   b. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors ils sont colinéaires.
   (on pourra traiter à part le cas où l'un au moins des vecteurs est nul)

2. Application

Soit ABCD un carré de côté $a > 0$. On construit à l'intérieur du carré ABCD le triangle équilatéral ABE et à l'extérieur du carré ABCD le triangle équilatéral CBF. On veut montrer que les points D, E et F sont alignés.

a. Justifier que si on pose $\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ alors $(\mathrm{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormal.

b. Déterminer les coordonnées des points D, E et F dans ce repère.

c. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 4 Une symétrie dans les courbes

Définition : un point M' est le symétrique d'un point M par rapport à une droite $\mathcal{D}$ lorsqu'il est sur cette droite ou lorsque la droite $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment [MM'].

Définition : la courbe représentative C_f d'une fonction f est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, f(x))$ où x prend toutes les valeurs pour lesquelles $f(x)$ existe (ensemble de définition de la fonction)

Soit f et g les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

a. Tracer C_f et C_g et déterminer leurs points d'intersection. On notera A celui d'abscisse strictement positive.

b. Soit x un réel positif ou nul, M le point de C_f d'abscisse x et N le point de C_g d'abscisse x^2. Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à la droite (OA).

c. Que peut-on en déduire pour les courbes C_f et C_g ?

Exercice 5 Variations et extremum

Définition : on dit qu'une fonction f admet un minimum (respectivement un maximum) en a sur un ensemble D lorsque pour tout réel x de D, $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$). Le nombre $f(a)$ est alors le minimum (respectivement maximum) de f sur D.

Définition : une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un **intervalle I** lorsque pour tous réels a et b de I, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement $f(a) \geq f(b)$).

On rappelle que pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence de ces deux nombres.

On considère un rectangle ABCD tel que $\mathrm{AB} = 10$ et $BC = 6$. On place les points M, N, P et Q respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] de telle façon que $\mathrm{AM} = \mathrm{BN} = \mathrm{CP} = \mathrm{DQ}$.

On pose $\mathrm{AM} = x$ et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du quadrilatère MNPQ.

a. Préciser l'intervalle dans lequel x varie et exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x, montrer que $\mathcal{A}(x) = 2(x - a)^2 + b$.

c. Déterminer pour quelle valeur de x cette aire est minimale et la valeur de ce minimum.

d. Déterminer les variations de la fonction $x \longmapsto \mathcal{A}(x)$ sur l'intervalle déterminé au a.

Exercice 6 Egalité de quotients

Pour montrer que deux nombres A et B sont égaux, on peut montrer que $A - B = 0$.

Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

On considère quatre nombres réels tels que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Démontrer que : (i) $\frac{ad+bc}{2ab} = \frac{2cd}{ad+bc}$ (ii) $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

(On se place dans la situation où tous ces quotients sont bien définis.)