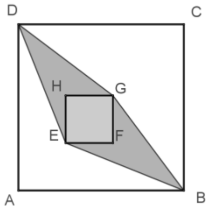
Thème : aires et volumes

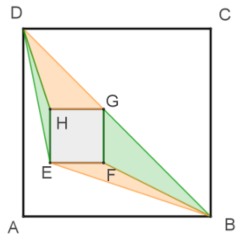
Exercice 1 Un carré dans un carré



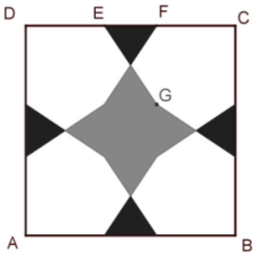
Le carré EFGH a pour côté 2 cm. Ses côtés sont parallèles à ceux du carré ABCD, dont le côté est 7 cm.

Quelle est l'aire de la surface grisée ?

Les triangles BGF et DHE ont la même « base » (HE = GF = 2) et des « hauteurs » dont la somme est 7 – 2 = 5. La somme de leurs aires est donc 5. Il en est de même des triangles DGH et BEF. La surface grisée a donc pour aire 14 (ou 10 si on ne compte pas le petit carré dans le « grisé »). Prendre garde au fait qu'il pourrait y avoir des cas où un des côtés du petit carré ne serait pas « vu » des points B ou D. Cela ne se produit que si le petit carré est dans un coin du grand, et le résultat numérique ne change pas.

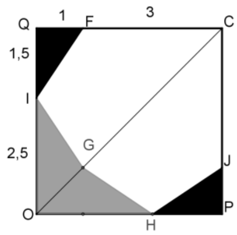


Exercice 2 Alhambra



Les céramiques qui habillent le soubassement d'un édifice sont des tuiles carrées de côté 8 cm. La distance EF est 2 cm. Le point G appartient à la diagonale [CA] et la droite (FG) est parallèle à (CB).
Les diagonales du carré et les médiatrices des côtés sont axes de symétrie de la figure.

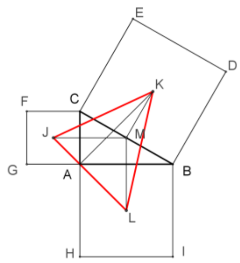
Quelle est l'aire de l'octogone gris ?

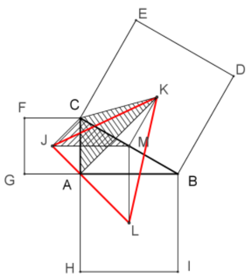


On a représenté ci-contre un quart de la tuile de base. Le triangle GOH a pour aire un huitième de l'aire cherchée. Son aire est $\frac{2,5}{2}$. L'aire cherchée est donc 10.

Exercice 3 Aire double

Sur les côtés du triangle rectangle ABC, on construit les carrés de centres J, K et L.
Montrer que l'aire du triangle JKL est supérieure au double de celle de ABC.





Appelons M le milieu de [CB]. Les triangles CJM et CAK ont leurs angles en C de même mesure (décalage de 45° de part et d'autre de $\widehat{ACB}$) et les côtés homologues de ces angles sont dans un rapport $\sqrt{2}$. (*pour qu'ils soient en situation de Thalès, il faudrait tourner un peu…*)
Il en résulte que l'angle $\widehat{CAK}$ mesure 45° et que [KA] est une hauteur du triangle JKL.
Par ailleurs, $\mathrm{KA} = \mathrm{JM}\sqrt{2}$. Or $\mathrm{JM} = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}{2}$
L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}(\mathrm{ABC}) = \frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{2}$

L'aire du triangle JKL est $(\mathrm{JKL}) = \frac{\mathrm{AK}\times\mathrm{JL}}{2}$. On peut exprimer JL d'une autre manière : $\mathrm{JL} = (\mathrm{AB}+\mathrm{AC})\frac{\sqrt{2}}{2}$

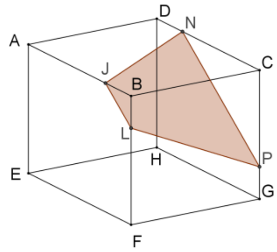
Donc $\mathcal{A}(\mathrm{JKL}) = \frac{1}{4}(AB+AC)^2$

Calculons $\mathcal{A}(\mathrm{JKL}) - 2\mathcal{A}(\mathrm{ABC}) = \frac{(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})^2 - 4\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{4} = \frac{(\mathrm{AB}-\mathrm{AC})^2}{4}$

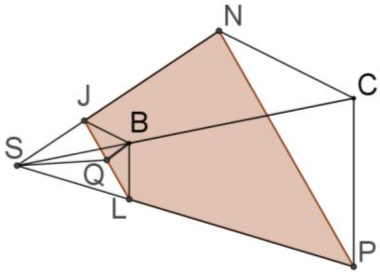
D'où le résultat demandé.

Exercice 4 Trapèze volant

Sur les arêtes d'un cube (d'arête 8), on place les points J et L sur [AB] et [BF] à la distance 2 de B, les points N et P sur [DC] et [CG] à la distance 6 de C. Quelle est l'aire du trapèze JLPN ?



La droite (NJ) et la droite (CB) se coupent en S. Ce point est aussi le point d'intersection des droites (BC) et (PL) (les trapèzes JBCN et LBCP ont les mêmes dimensions). Les triangles NCS et JBS sont en situation de Thalès. En notant x la longueur de BS, il vient $\frac{x}{x+8} = \frac{2}{6}$. Et donc $x = 4$. Et donc CS = 12.



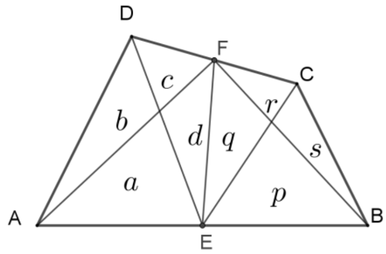
Les triangles SJL et SPN sont en situation de Thalès et le rapport d'agrandissement est 3. La hauteur de sommet S du triangle SJL est déterminée en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle SQB (Q étant le milieu de l'hypoténuse du triangle isocèle rectangle JBL). On a BQ = $\sqrt{2}$ et BS = 4. Donc SQ = $\sqrt{14}$.

L'aire du triangle SJL est donc $\frac{\sqrt{14}\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{7}$. Elle est le neuvième de l'aire de SPN, et donc l'aire du trapèze JNPL en est le produit par 8, soit $16\sqrt{7}$.

Exercice 5 Puzzle 8 pièces

On considère un quadrilatère ABCD et les milieux E et F des côtés [AB] et [CD]. Les segments tracés sur la figure découpent 8 triangles dont les aires sont notées a, b, c, d, p, q, r et s. Prouver que :

$$a + d = p + q$$
$$a + r = c + p$$
$$b + s = d + q$$

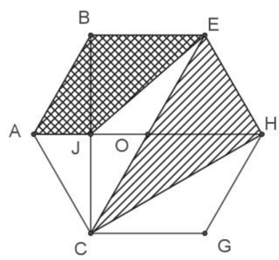


1. La médiane (FE) du triangle FAB découpe ce dernier en deux parties de même aire (deux triangles ayant même « base » et même « hauteur »).
2. Le même argument appliqué au triangle ECD et sa médiane (EF) conduit à l'égalité :$c + d = p + q$. En soustrayant membre à membre ces deux égalités on obtient $a - c = p - r$, d'où le résultat.
3. Considérons les hauteurs des triangles FAB, CEB et DAE. Elles sont parallèles, puisque perpendiculaires à (AB), et déterminent sur le segment [CD] des segments de même longueur puisque F est le milieu de [DC]. L propriété de Thalès permet d'en déduire que la hauteur de FAB est la demi-somme des hauteurs de CEB et DAE (si on veut, on fait une construction : la parallèle à (AB) passant par C détermine avec les hauteurs issues de F et D un triangle et une « droite des milieux ». Il s'ensuit que l'aire du triangle FAB est la somme des aires des triangles DAE et CEB. Ce qui s'écrit : $a + d + p + q = p + s + a + b$, ce qui conduit au résultat demandé.

Exercice 6 Art hexagonal

On a colorié deux parties d'un hexagone régulier selon le schéma ci-contre :

La partie hachurée CHE a une aire de 420 cm². Quelle est l'aire de la partie quadrillée BEJA ?



L'hexagone peut être décomposé en six triangles équilatéraux de sommet commun O. La partie CHE couvre l'équivalent de deux de ces six triangles (OHE et OCH, moitié de OHCG), donc le tiers de l'hexagone, dont l'aire est 1 260 cm². La partie EJH est un triangle de même hauteur que le triangle équilatéral EOH, mais sa « base » [JH] a une longueur valant 1,5 fois le côté de EOH. Son aire est donc $1{,}5 \times 210 = 315\ \mathrm{cm}^2$. L'aire de la partie BEJA est donc $630 - 315 = 315\ \mathrm{cm}^2$

Thème : équations

Exercice 1 L'exposant inconnu

Quels sont les nombres entiers x satisfaisant $(x-5)^{x^2-4} = 1$?

Une alternative : ou bien l'exposant est nul, ou bien le nombre à élever à cette puissance est 1 ou – 1 si l'exposant est pair. Les possibilités sont 2, – 2, 6 et 4

Exercice 2 Le don paisible

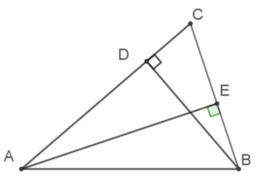
Ali, Ben et Caro possèdent chacun un peu d'argent. Les sommes possédées sont respectivement proportionnelles à 7, 6 et 5. L'un des trois donne 9€ à un des deux autres et les nouvelles sommes possédées sont maintenant proportionnelles à 6, 5 et 4, la somme totale restant inchangée. Quelles étaient les sommes possédées ?

Appelons a, b et c les sommes possédées au départ par Ali, Ben et Caro respectivement. La condition donnée par l'énoncé s'écrit :$\frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18}$ Pour la répartition (a, b, c) initiale et $\frac{a\prime}{6} = \frac{b\prime}{5} = \frac{c\prime}{4}$ pour la répartition finale (a', b', c'). Comme $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$, il est impossible que a ait donné à b (dont la part relativement à a devrait augmenter). Le même raisonnement conduit à l'impossibilité que a ait donné à c, car $\frac{5}{7} > \frac{2}{3}$, que b ait donné à c (car $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$). Reste trois conditions nécessaires possibles :

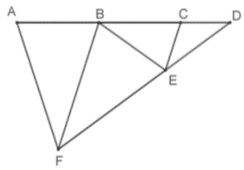
1. $\frac{5}{6}(a+9) = \frac{6}{7}a - 9$ (b donne à a) fournit (693, 594, 495) , mais $\frac{693+9}{6} \neq \frac{495}{4}$
2. $\frac{2}{3}(a+9) = \frac{5}{7}a - 9$ (c donne à a) fournit (315, 270, 225)
3. $\frac{4}{5}(b+9) = \frac{5}{6}b - 9$ (c donne à b) fournit (567, 486, 405), mais $\frac{567}{6} \neq \frac{486+9}{5}$

L'unique solution est le triplet (315, 270, 225)

Exercice 3 Des triangles d'Or

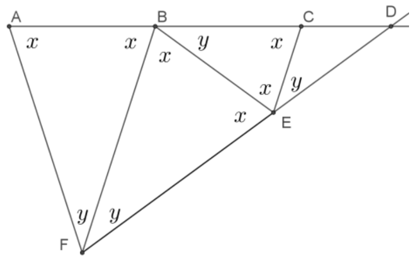


1. L'angle en C du triangle ABC a pour mesure le quadruple de l'angle en A du triangle ABE. L'angle en B du triangle ABC a pour mesure le double de son angle en A. Quelles sont les mesures des angles de ABC ?



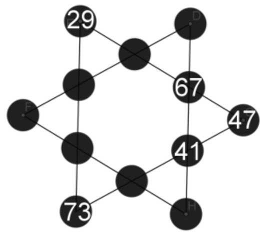
2. On construit la figure ci-contre : les triangles ABF et BFE sont isocèles, de sommet principal F, le triangle BCE est isocèle, de sommet principal B. Le point D est l'intersection des droites (AC) et (FE).
a. Montrer que le triangle CED est isocèle si et seulement si le triangle ADF est isocèle. Combien mesurent les angles des triangles ABF et CED dans ce cas ?

1. Appelons x la mesure de l'angle en A du triangle ABE. L'angle en B du triangle ABC est son complémentaire. L'angle en C du triangle ABC est le complémentaire de l'angle en A du triangle CAE. Il s'ensuit que l'angle en A du triangle ABC mesure $x + 90 - 4x = 90 - 3x$. La somme des angles du triangle ABC s'écrit donc :
$S = 90 - 3x + 2(90 - 3x) + 4x$. D'où vient que $5x = 90$ et donc $x = 18$. Ce qui donne pour l'angle en A la mesure 36, pour l'angle en C la mesure 72 et comme 36 + 72 = 108, la mesure de l'angle en B est aussi 72.



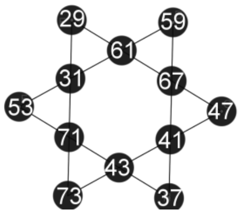
2. La figure ci-contre montre ce qui peut être déduit des hypothèses en appelant x et y les mesures des angles du triangle ABF (et $2x + y = 180$). L'angle en C du triangle CED a pour mesure $180 - x$, c'est-à-dire $x + y$. Si ce triangle est isocèle, on a $y = 180 - (x + y + y) = x - y$. Donc $x = 2y$, ce qui conduit au caractère isocèle de ADF. Réciproquement, si ADF est isocèle, les angles de CED ont pour mesures y, y et $x + y$. Les mesures trouvées sont 36, 72 et 72 dans un cas, 108, 36 et 36 dans l'autre. Ce sont les *triangles d'Or* (on les retrouve dans le pentagone régulier et ses diagonales).

Exercice 4 Première étoile



L'étoile ci-contre porte 12 nombres premiers distincts. Le plus grand et le plus petit de ces nombres sont déjà inscrits. Les six séries de quatre nombres ont la même somme. Trouver les nombres manquants.

Les nombres cherchés sont donc compris entre 29 et 73. Deux séries sont presque complètes et leurs sommes diffèrent de 18. Elles doivent donc être complétées par deux nombres premiers compris entre 31 et 71 différant de 18. Il y a deux possibilités : 43 et 61, 53 et 71. Dans le premier cas, la somme portée sur chaque ligne est 204. Dans le second, elle est 214.



Dans le premier cas, on doit trouver deux nombres premiers de somme 108 parmi 31, 37, 53, 59 et 71 et deux nombres premiers de somme 102 parmi les cinq mêmes (pour compléter les lignes verticales). Les possibilités sont 59 et 37, 71 et 31.
La ligne contenant 61 doit être complétée par trois nombres de somme 143, dont 53 (qui occupera la place la plus à gauche). Les deux qui restent ont donc pour somme 90, ce sont donc 31 et 59. On obtient la distribution ci-contre.
Dans le second cas, on doit trouver deux nombres premiers de somme 106 parmi 31, 37, 43, 49 et 61. Mais ce n'est pas possible. On a donc trouvé la seule solution.

Exercice 5 Petite université

Les départements de sciences d'une petite université comptent 30 Professeurs d'université (c'est un grade, il y a d'autres enseignants), des mathématiciens, des physiciens, des chimistes et des biologistes. Physiciens et biologistes ensemble atteignent la moitié de l'effectif des mathématiciens. Physiciens et chimistes ensemble forment le double de l'effectif des biologistes. Combien y a-t-il de mathématiciens ?

Notons m, p, c, b les effectifs respectifs de mathématiciens, physiciens, chimistes et biologistes. Les données de l'énoncé correspondent à : $m + p + c + b = 30, m = 2(p + b), 2b = p + c$. Il s'ensuit que m est un entier pair et que $m + 3b = 30$, donc que m est un multiple de 3. m est donc un multiple de 6. On peut utiliser quelques inégalités (qui éliminent $m = 6$ et $m = 24$). Reste à examiner les trois autres possibilités, parmi lesquelles se dégage une seule solution, $m = 18, p = 5, c = 3$ et $b = 4$.

Exercice 6 Accord de sixte

On demande de trouver six entiers consécutifs et non multiples de 7, dont la somme soit un carré parfait

Il existe un entier naturel k tel que les six nombres soient $7k + 1, 7k + 2, \dots, 7k + 5, 7k + 6$. La somme de ces six nombres est alors $42k + 21$, qui peut s'écrire $21(2k + 1)$. Ce nombre est un carré parfait si et seulement si les carrés des nombres premiers qui le divisent le divisent aussi. 7 et 3 doivent donc diviser $2k + 1$. Le plus petit multiple commun de 3 et 7 est 21, ce qui donne $k = 10$. La plus petite suite de 6 convenable est donc 71, 72, 73, 74, 75, 76, dont la somme est 441.

Exercice 7 Les randonneuses

Anna et Léna partent au même moment, Anna de la ville A vers la ville B, Léna de B vers A. Au moment où elles se croisent, Anna a parcouru 12 km de plus que Léna. Elles continuent leur chemin, Anna pendant 4,5 heures, Léna pendant 8 heures, avant d'atteindre leur but. Quelle distance sépare A de B ?

Appelons v et w les vitesses moyennes respectives d'Anna et Léna (il est clair que $v > w$), d la distance séparant A de B, t la durée écoulée entre leur départ et leur croisement. Les unités sont l'heure et le kilomètre. Les données de l'énoncé se traduisent par :$(v + w)t = d$ et $(v - w)t = 12$ ce sont les équations de la rencontre, puis $(t + 4{,}5)v = d$ et $(t + 8)w = d$ qui représentent la totalité des parcours.
Ces deux dernières égalités donnent $t(v - w) + 4{,}5v - 8w = 0$, mais comme $t(v - w) = 12$, on en déduit que $12 + 4{,}5v - 8w = 0$, ou encore que $w = \frac{12+4{,}5v}{8}$. Quelques éliminations plus tard, on obtient $d = 84$ (et aussi $v = 8, w = 6$ et $t = 6$. Anna et Léna sont de bonnes marcheuses.

Thème : probabilités, logique, dénombrement

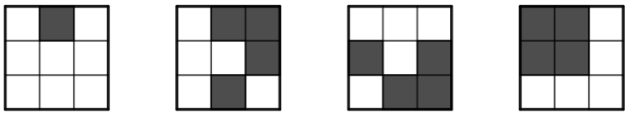
Exercice 1 Les jolies colonies de vacances

Trois activités sont proposées cette semaine : canoé, natation et pêche. Chaque colon pourra pratiquer au maximum deux de ces activités. 9 ont choisi de ne rien faire, 15 feront du canoé, 22 nageront et 12 pêcheront. Quel est notre effectif (minimum) ?

Si tous ceux qui pratiquent une activité en pratiquent deux, l'effectif des actifs est la moitié de (15 + 22 + 12), mais ce nombre est impair. Il y au moins un colon qui ne fait qu'une activité et 24 qui en font deux. L'effectif minimum est donc 34.

Exercice 2 Art rotatif

On dessine sur un carré de 9 cases. Chacune des 9 cases peut être coloriée ou non. Deux motifs sont considérés comme semblables si l'un des deux peut être obtenu à partir du premier au moyen d'une rotation. C'est le cas des deux motifs centraux de la figure ci-contre. Combien de motifs différents peut-on réaliser ?



Voir la solution proposée par un groupe de stagiaires à la fin de ce document

Exercice 3 Prenez et multipliez

Ali et Dora s'opposent dans le jeu suivant : à chaque triplet de nombres différents choisis parmi {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160} on associe le produit des trois nombres. Chaque produit supérieur à 2 017 donne un point à Ali. Lorsque le produit est inférieur à 2 017, le point va à Dora.

1. Combien peut-on composer de triplets ordonnés de nombres différents à partir des nombres proposés ?
2. Combien de ces triplets donnent un produit supérieur à 2 017 ? Qui gagne ?

1. Pour faire un triplet, il faut choisir un nombre parmi les douze, puis un parmi les onze restants, puis un parmi les dix restants. Il y a donc a priori 12×11×10 = 1320 triplets. Mais les triplets $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$ correspondent au même triplet ordonné ((a, b, c) par exemple, si $a \leq b \leq c$). Il y a donc 220 cas à examiner.

2. *Plus grand élément du triplet*	*Nombre de triplets correspondant*	*Produits supérieurs à 2 017*	*Produits inférieurs à 2 017*
160	55	48	7
80	45	31	14
40	36	17	19
32	28	10	18
20	21	2	19
16	15	0	15
10	10	0	10
8	6	0	6
5	3	0	3
4	1	0	1
Total	220	108	112

Dora gagne.

Exercice 4 Voracité

Je travaille dans une start-up qui met ses employés en concurrence. On me propose de faire signer des contrats à 10 clients potentiels. J'ai réussi avec le premier, échoué avec le second. J'imagine que pour chacun des clients suivants, la probabilité de succès (il signe) sera égale au rapport $\frac{nombre\ de\ contrats\ déjà\ signés}{nombre\ de\ clients\ déjà\ visités}$. Puis-je espérer garder ma place (c'est-à-dire faire signer 5 contrats ou plus) ?

Client	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Nb succès	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilité	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
Nb succès	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
Nb succès		1	2	3	4	5	6	7
Probabilité		1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
Nb succès			1	2	3	4	5	6
Probabilité			1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
Nb succès				1	2	3	4	5
Probabilité				1/5	1/6	1/7	1/8	1/9

La probabilité pour que cinq ou plus de cinq clients aient signé se lit dans la dernière colonne : elle est de 5/9. J'ai une petite chance de sauver mon emploi…

Exercice 5 Heroïc Fantasy

En ce temps-là, notre héros devait, muni de son épée, affronter un dragon doté de trois têtes et trois queues également redoutables. D'un coup d'épée, il pouvait trancher une ou deux têtes ou une ou deux queues, avec les effets suivants :

- Il coupe une tête : il en repousse trois
- il coupe deux têtes : rien ne repousse
- il coupe une queue : il en repousse deux
- il coupe deux queues : il repousse une tête

Combien de coups d'épée le héros devra-t-il donner au minimum pour que le dragon n'ait plus ni queue ni tête ?

Couper des têtes n'agit que sur le nombre de têtes. Cet effectif doit être rendu pair pour parvenir à la disparition des têtes. Couper des queues agit sur le nombre de têtes. On peut donc chercher à porter ce nombre à 4 ou 6. Si le héros coupe deux queues, le monstre aura 4 têtes, il restera une queue qu'on peut dédoubler, mais cela ne « rapportera » qu'une tête. Voici donc un algorithme possible :

- couper une queue : 3 T, 4 Q
- couper une queue : 3 T, 5 Q
- couper une queue : 3 T, 6 Q
- couper deux queues : 4 T, 4 Q
- couper deux queues : 5 T, 2 Q
- couper deux queues : 6 T
- couper deux têtes : 4 T
- couper deux têtes : 2 T
- couper deux têtes : FIN

Exercice 6 Stars du Disco

On forme des chaînes de 10 caractères avec les lettres A et B. Par exemple, ABBBABAABB en est une. Combien peut-on former de telles chaînes ne faisant pas apparaître ABBA ?

Il y a 2^{10} chaînes possibles, soit 1 024.

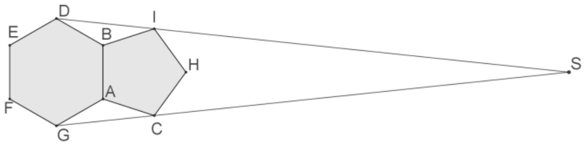
Intéressons-nous aux chaînes faisant apparaître au moins une fois ABBA. Une telle chaîne est déterminée par les quatre cases successives dans lesquelles sont inscrites les lettres ABBA, les autres cases étant indifférentes. Il y a 7 choix possibles pour la suite des quatre cases (1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789, 789-10) et pour chacun de ces choix 2^6 chaînes complémentaires.

Au total, 7×2^6 chaînes permettent de lire au moins une fois ABBA.

$1\,024 - 448 = 576$ chaînes ne font pas apparaître ABBA.

Thème : angles et distances

Exercice 1 Bijou de mathématicien

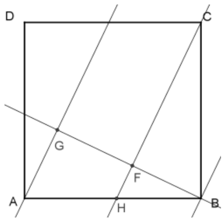


Pour se distinguer d'un éminent collègue arborant des araignées, un mathématicien pas (pas encore…) célèbre se fait confectionner une broche constituée d'un hexagone réguler et d'un pentagone régulier de même côté accolés, terminée par une épingle, comme sur la figure ci-contre.

Quelle est la mesure de l'angle en S ?

Le triangle DGS est isocèle. Le triangle DBI aussi, et son angle au sommet mesure, en degrés, 360 – 120 – 108 = 132. L'angle $\widehat{\mathrm{IDB}}$ mesure donc 24°, et l'angle $\widehat{\mathrm{IDG}}$ mesure 24 + 60 = 84°. Reste 12° pour l'angle en S.

Exercice 2 Carré coupé



Trois droites parallèles passent par trois sommets d'un carré. Une perpendiculaire passant par B les coupe en F et G. La distance GF vaut 5, la distance GB vaut 7 (la figure n'est pas juste).

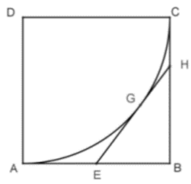
Quel est le côté du carré ?

Les triangles BGA et CFB sont rectangles, ils ont les mêmes angles et des hypoténuses de même longueur. Ils ont donc des cathètes homologues de même longueur : $\mathrm{AG} = \mathrm{BF}$ et $\mathrm{BG} = \mathrm{CF}$

Reste à écrire le théorème de Pythagore dans le triangle BFC : $\mathrm{BC}^2 = 49 + 4$

Exercice 3 Tangente dans un coin

Le carré ABCD a pour côté 1. Le point E est le milieu du côté [AB]. Par E, on mène la tangente au quart de cercle de centre D d'extrémités A et C. Cette tangente touche le quart de cercle en G et coupe le côté [BC] en H. Quelle est la longueur du segment [EH] ?

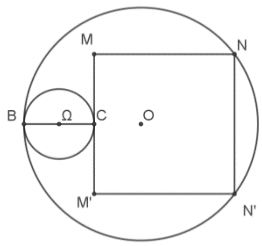


Appelons x la longueur cherchée et appliquons le théorème de Pythagore au triangle EBH rectangle en B : $x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2$. En effet, il y a égalité des longueurs des segments [AE] et [EG] d'une part, [HG] et [HC] d'autre part (propriété des tangentes). On obtient donc en développant : $x = \frac{5}{6}$.

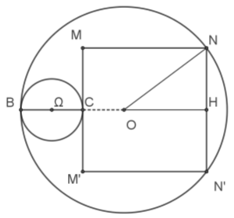
Exercice 4 Un carré entre deux cercles

Le cercle de centre Ω et de rayon 3 est tangent intérieurement au cercle de centre O et de rayon 10. La droite (BC) passe par O. Un carré dont le côté [MM'] est tangent en C au cercle de centre Ω a pour autres sommets des points N et N' du cercle de centre O. Quelle est la longueur de [MM'] ?

Après raisonnement, on choisira la réponse parmi les nombres 8, 10, 12, 14 et 16.

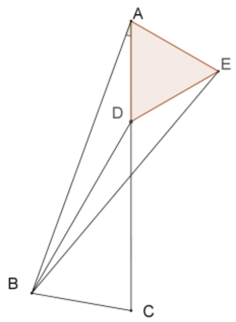


Raisonnons dans le triangle rectangle OHN, et appelons x la longueur MC (ou HN). Le théorème de Pythagore donne $100 = (2x - 4)^2 + x^2$



L'équation que nous obtenons est du second degré. On peut tenter de factoriser ou choisir la solution parmi celles qui sont proposées.

Exercice 5 20 degrés

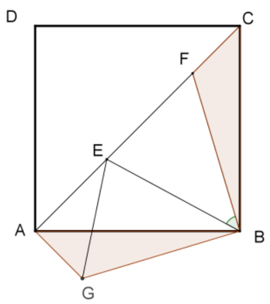


Le triangle isocèle ABC, de sommet principal A, a un angle au sommet de mesure 20°. Sur la demi-droite [AC), on place le point D tel que AD = BC.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BDC}}$?
Indication : on pourra considérer le triangle équilatéral DAE (le point E étant de l'autre côté de (AC) que B).

Le triangle BAE possède un angle de mesure 80°, compris entre deux côtés de mêmes longueurs que les côtés [AB] et [BC] du triangle ABC (l'angle en B de ce triangle, isocèle, valant lui aussi 80°). Les deux triangles ABC et BAE sont dits *isométriques*. Le triangle ABE est isocèle, de sommet principal B, et comme DA = DE, la droite (BD) est la médiatrice de [AE]. L'angle en B du triangle ABD a donc pour mesure 10°. Les angles du triangle BDC ont donc pour mesures 80 – 10, 80 et…30°.

Exercice 6 Un découpage pythagoricien

Sur la diagonale [AC] du carré ABCD, on place les points E et F tels que $\widehat{\mathrm{EBF}} = 45°$. Montrer que EF² = AE²+FC².



Considérons le point G situé à l'extérieur du carré et construit de telle manière que les triangles BCF et BAG soient isométriques (point d'intersection de deux cercles). L'angle $\widehat{\mathrm{GAE}}$ est droit (somme de deux angles de mesure 45°). On peut donc appliquer le théorème de Pythagore au triangle GAE, ce qui donne, en revenant aux segments originaux GE² = AE² + FC².
Reste à prouver que GE = EF, mais cela résulte de l'isométrie des triangles FEB et DEB (angle de 45° compris entre côtés homologues de mêmes mesures).

Thème : nombres

Exercice 1 Développement illimité pour trois inconnues

Trouver trois entiers a, b et c tels que $\frac{a}{7} + \frac{b}{11} + \frac{c}{13} = 0,946\ 053\ 946\ 053\ 946\ 053 \ldots$

Le nombre figurant au second membre de l'égalité est un rationnel dont on a donné la période 946 053.

Appelons N le nombre $0,946\ 053\ 946\ 053\ 946\ 053 \ldots$On peut écrire l'égalité $1\ 000\ 000\ N = N + 946\ 053$, d'où on tire $N = \frac{946\ 053}{999\ 999}$; après simplification par 9 puis par 37 : $N = \frac{947}{1\ 001}$. On note que $7 \times 11 \times 13 = 1\ 001$

L'équation proposée se réduit donc à $143a + 91b + 77c = 947$.

À ce stade, il n'y a plus qu'à procéder à des essais (on n'envisage pas la nullité d'une des inconnues, dont on pourrait montrer qu'elle n'est pas possible).

a	$91b +$ $77c$	b	c	b	c	b	c	b	c	b	c	b	c	b	c	b	c
1	804	1		2		3		4		5		6		7		8	
2	661	1		2		3		4		5		6		7			
3	518	1		2		3		4	2	5							
4	375	1		2		3		4									
5	232	1		2													
6	89																

Il n'apparaît qu'une solution :

$a = 3, b = 4$ et $c = 2$

Exercice 2 Éloge du calcul littéral

On dispose de 10 000 cartes, marquées chacune d'un entier. Tous les entiers compris entre 1 et 10 000 sont utilisés. On décide d'ôter du paquet toutes les cartes marquées d'un carré parfait. Cela fait, on renumérote les cartes, et on recommence. Combien de telles manœuvres faudra-t-il pour qu'il ne reste plus qu'une seule carte ?

Sur les 10 000 cartes initiales, 100 exactement portent un carré parfait (1^2, 2^2, 3^2,…, 99^2, 100^2). On les enlève, il reste 9 900 cartes, dont 99 portent un carré parfait (car 99^2 = 9 801). Au second tri, il y donc encore 99 cartes à enlever, et il en reste… 9 801. Poussons un peu : on enlève 99 cartes, il en reste 9 702, nombre supérieur au carré de 98, qui est 9 604. Mais justement 9 702 – 9 604 = 98…

Est-il vrai qu'en deux mouvements, on passe à un effectif qui soit encore un carré ?

$n^2 - n = n(n-1)$, manifestement supérieur au carré de $(n-1)$. Mais $n^2 - n - (n-1) = (n-1)^2$

Il faudra donc 99 fois deux mouvements pour qu'il ne reste que 1, carré de 1.

Exercice 3 Olympiades nationales 2016 (très partiel)

À tout nombre entier x s'écrivant avec trois chiffres dans le système décimal, on associe la somme $A(x)$ des carrés de ses chiffres. On a ainsi $A(100) = 1$ et $A(999) = 343$. Quelle est la plus grande valeur de la différence $\Delta(x) = x - A(x)$?

Appelons a, b et c les chiffres d'un entier x. On a $\Delta(x) = a(100-a) + b(10-b) + c(1-c)$.

De ces trois termes, deux sont positifs, le troisième est négatif ou nul. Le maximum de $a(100-a)$ est obtenu pour $a = 9$. En effet $a(100-a) - a'(100-a') = (a-a')(100-a-a')$. Le maximum de $b(10-b)$ est obtenu pour $b = 5$ (on peut faire l'étude exhaustive). Le dernier terme peut être rendu nul avec $c = 0$ ou $c = 1$. Le maximum de Δ est donc obtenu pour 950 et 951. C'est 844.

Exercice 4 Beaucoup de bruit pour rien

Écrire de façon concise le nombre $N = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2\ 014}\right)\left(1+\frac{1}{2\ 016}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2\ 014}\right)\left(1-\frac{1}{2\ 016}\right)}$

Observons que, pour tout entier n, $\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)} = \frac{2n+1}{2n-1}$.

Le produit N est donc « télescopique », le numérateur d'un quotient étant égal au dénominateur du quotient suivant.

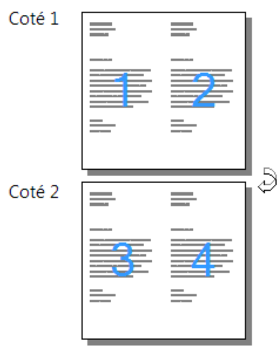
Il s'ensuit que $N = \frac{3.5.7\ \ldots .2\ 015.2\ 017}{1.3.5.\ \ldots\ 2\ 013.2\ 015} = 2\ 017$

Exercice 5 Zéro papier (pas tout-à-fait)

Dans ma start-up, j'ai instauré un système draconien d'économie de papier. Jusque-là, j'avais limité la longueur des documents à imprimer à 10 pages A4. Aujourd'hui, je vais plus loin : les documents papier devront être imprimés en recto-verso, et chaque face A4 fera apparaître 2 pages en format réduit (voir figure).

On suppose que toutes les longueurs de document – entre une page et dix pages – sont également rencontrées.

Quelle est en pourcentage l'économie réalisée ? Que serait ce pourcentage si les effectifs de tirage selon la longueur suivaient la distribution :



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	8	7	4	3	2

Le tableau suivant montre comment s'opère la réduction voulue :

Avant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Après	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Si on suppose une répartition uniforme des longueurs, on peut comparer les sommes des deux lignes de ce tableau. On passerait de 55 feuilles à 18. L'économie réalisée est donc $\frac{37}{55} \cong 67\%$

Si on suppose que les fréquences d'apparition suivent le tableau donné, on obtient comme sommes :

$2 \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 3 + 8 \times 4 + 10 \times 5 + 8 \times 6 + 7 \times 7 + 4 \times 8 + 3 \times 9 + 2 \times 10 = 286$ selon l'ancienne disposition,

$2 \times 1 + 4 \times 1 + 6 \times 1 + 8 \times 1 + 10 \times 2 + 8 \times 2 + 7 \times 2 + 4 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 3 = 93$ selon la nouvelle

L'économie est donc : $\frac{193}{286} \cong 67\%$. Il y a finalement peu de différence…

Exercice 6 Quinte de carrés

1. Le nombre 1 815 est la somme des carrés de cinq entiers consécutifs. Lesquels ?
2. Montrer que la somme des carrés de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.
3. Quels sont les entiers à la fois somme des carrés de cinq entiers consécutifs et somme de cinq entiers consécutifs ?

1. La moyenne de ces carrés est 363. On peut essayer avec le carré le plus proche, 361. Il s'avère que :
$289 + 324 + 361 + 400 + 441 = 1\,815$

2. Appelons n le nombre moyen parmi ces cinq. On a :

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10$$

3. Appelons p le nombre moyen parmi les cinq à sommer :

$$p - 2 + p - 1 + p + p + 1 + p + 2 = 5p$$

Si un nombre est somme de cinq carrés consécutifs et de cinq entiers consécutifs, on peut trouver un entier n et un entier p tels que $5n^2 + 10 = 5p$, ou encore $p = n^2 + 2$. Attention, n et p sont supérieurs à 3.

Thème : algorithmes et programmation

Exercice 1 La machine à assembler

La machine à assembler peut réaliser deux opérations sur des chaînes de caractères :

1. L'opération COLLER (notée +) qui consiste à faire une seule chaîne avec deux. Par exemple *mer+ci* donne *merci*
2. L'opération RETOURNER (notée R) qui consiste à intervertir l'ordre des caractères de la chaîne. Par exemple, R(*rein*) donne *nier*

Trois chaînes de caractères, notées 1, 2 et 3, ont été fournies à la machine, qui a exécuté le programme :

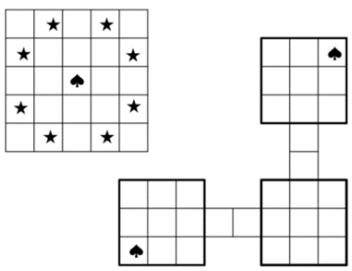
R(1+2)+3

En sortie, on a obtenu le mot VON NEUMANN. Quelles étaient ces chaînes de caractères (on précise que l'espace est un caractère et que chacune de ces trois chaînes était de longueur inférieure ou égale à 4) ?

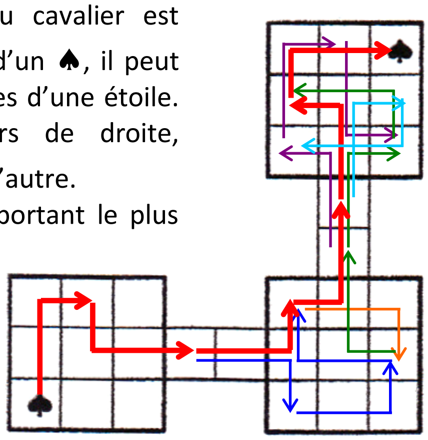
Nécessairement deux des trois chaînes sont constituées de quatre caractères et l'autre de trois caractères.
Ainsi, trois triplets conviennent :

chaîne 1	chaîne 2	chaîne 3
MUEN	_NOV	ANN
UEN_	NOV	MANN
UEN	_NOV	MANN

Exercice 2 Un cavalier, deux ponts



La règle concernant le déplacement du cavalier est rappelée à gauche : de la case marquée d'un ♠, il peut atteindre chacune des huit cases marquées d'une étoile. Le cavalier doit effectuer le parcours de droite, comportant deux ponts, et aller d'un ♠ à l'autre.
Déterminer les trajets (ou le trajet) comportant le plus petit nombre de déplacements.



En étudiant, à chaque nouveau déplacement, toutes les alternatives permettant de « passer les ponts », on constate que le trajet le plus court (en rouge ci-contre) comporte 6 déplacements.

Exercice 3 Un classique pour les logiciens

On dispose de cartes dont un côté est marqué d'une lettre et l'autre d'un nombre entier. Le logicien affirme : « parmi ces quatre cartes, celles qui sont marquées d'une voyelle d'un côté portent un nombre pair de l'autre côté ». Voici les cartes posées sur la table :

Combien de cartes est-il nécessaire de retourner pour contredire (éventuellement) le logicien ?
Lesquelles ?

Le logicien affirme que : « si voyelle alors pair » pour que l'affirmation soit vraie il est nécessaire qu'il y ait un nombre pair au verso de la carte E. De plus, pour que l'affirmation du logicien soit vraie sa contraposée (« si impaire alors consonner ») doit être vraie également il est nécessaire qu'il y ait une consonne au verso de la carte 7. Enfin, les deux autres cartes ne permettent pas de contredire ou de valider l'affirmation du logicien. En effet, la réciproque de ladite affirmation n'a aucune raison d'être vraie. En conclusion il est nécessaire et suffisant de retourner les cartes E et 7 pour contredire ou valider l'affirmation du logicien.

Exercice 4 En rang par un, par deux, par quatre, etc.

Sur la première ligne du tableau ci-contre on a inscrit « 0 ». Sur la seconde figurent deux « 1 », sur la troisième figurent quatre « 0 », ainsi de suite.

En tout, 511 symboles ont été écrits. Combien de « 0 », combien de « 1 » ?

0															
1	**1**														
0	**0**	**0**	**0**												
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**								
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**…**	**…**											

On remarque que $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 = 511$. Ainsi, en écrivant 511 symboles on a écrit 9 lignes.
$1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 = 341$ et $2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 170$. Il y a donc 341 « 0 » et 170 « 1 » en tout.

Exercice 5 Demi-tour

Quatre verres sont posés dans le bon sens, un est à l'envers. Parmi les cinq, on en choisit trois qu'on retourne (ils ne sont pas nécessairement voisins). Peut-on espérer qu'après un certain nombre de telles opérations, les verres seront tous dans le bon sens ? Combien ?

Les verres retournés n'étant pas nécessairement voisins, la position des verres n'influe pas sur le résultat. En utilisant la notation « 4B/1E » pour désigner que 4 verres sont dans le bon sens et 1 verre est à l'envers on constate qu'au premier retournement on n'a que deux alternatives : soit 1B/4E (retourner 3 verres « B ») soit 3B/2E (retourner deux verres « B » et l'unique verre « E »).
On retrace ci-dessous les alternatives à chaque retournement (on n'indique que celle qui conduisent le plus vite à 5B/0E) :

Etat initial	1^{er} retournement	2^e retournement	3^e retournement
4B/1E	1B/4E	2B/3E	5B/0E
		4B/1E	…
	3B/2E	0B/5E	…
		2B/3E	5B/0E
		4B/1E	…

On peut donc mettre tous les verres dans le bon sens en un minimum de trois retournements.

Exercice 6 Trois lignes de programme

Que fait le programme ci-contre ?

A ← A + B
B ← A – B
A ← A – B

n° ligne	Valeur contenue dans A	Valeur contenue dans B
	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
1	$\boldsymbol{a+b}$	$\boldsymbol{b}$
2	$\boldsymbol{a+b}$	$\boldsymbol{a}$ $(a+b-b)$
3	$\boldsymbol{b}$ $(a+b-a)$	$\boldsymbol{a}$

Le tableau d'étapes ci-dessus permet de conclure que ce programme échange les valeurs contenues dans les variables A et B.

Exercice 7 Premier entré, dernier sorti

La procédure P1 transforme la chaîne de caractère M-A-T-H-S en S-H-T-A-M (elle retourne la chaîne). La procédure P2 transforme la même chaîne en S-A-T-H-M (elle échange le premier et le dernier caractère).
Que fait la procédure combinée P1-P2-P1 ?

La procédure combinée P1-P2-P1 est la procédure P2.
En effet, pour une chaîne composée de n caractères si on désigne chaque caractère par sa position dans la chaîne initiale, on a :

1-2-3-…-(n – 2)-(n – 1)-n en appliquant P1 on a : n-(n – 1)-(n – 2)-… -3-2-1
en appliquant P2 on a : 1-(n – 1)-(n – 2)-… -3-2-n
en appliquant P1 on a : n-2-3-…-(n – 2)-(n – 1)-1

Exercice 8 Un successeur d'Epiménide

Mon comportement dépend du jour de la semaine : le lundi, le mercredi et le vendredi, je dis toujours la vérité. Les autres jours, je ne prononce que des affirmations fausses.
Demain, je dirai la vérité.
Quel jour sommes-nous ?

En notant **V** les jours de vérité et **M** les jours de mensonge. On remarque qu'on a la répartition suivante :

jour de la semaine	L	M	M	J	V	S	D
vérité ou mensonge	**V**	**M**	**V**	**M**	**V**	**M**	**M**

On procède par disjonction de cas :

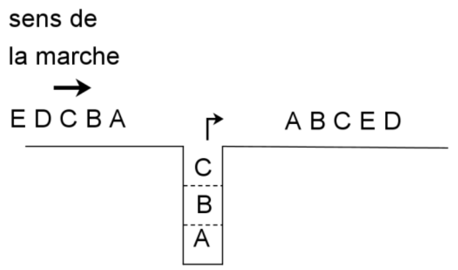
- 1er cas si aujourd'hui est un jour **V** : alors « demain, je dirai la vérité » est une vérité donc demain sera un jour **V**. Or, ceci est impossible puisqu'il n'y a jamais deux jours **V** consécutifs.
- 2nd cas si aujourd'hui est un jour **M** : alors « demain, je dirai la vérité » est un mensonge donc demain sera un jour **M**. Or, on n'a deux jours **M** consécutifs qu'une seule fois dans la semaine.

Ainsi, on en conclut que nous sommes samedi.

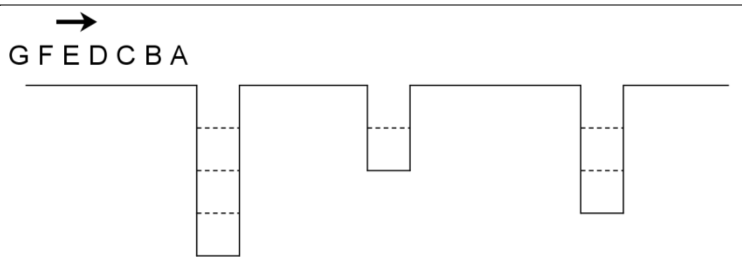
Exercice 9 Une randonnée semée d'embûches

Le parcours de cette randonnée est difficile : on peut tomber dans des trous. Si A, B et C, qui se suivent dans cet ordre, tombent dans un trou, ils attendent le passage du reste de la troupe, qui les aide à sortir ans l'ordre inverse de celui dans lequel ils sont tombés.

Exemple



Question



Quel sera l'ordre d'arrivée dans ce cas ?

L'ordre d'arrivée sera GDCEFAB.

Exercice 10 Deux sacs de billes

Des billes sont disposées dans deux sacs. On suppose que le nombre total de billes permet de réaliser *ad libitum* les opérations suivantes :
Opération A : ôter le même nombre de billes de chacun des sacs
Opération B : doubler le nombre de billes contenues dans un des sacs
Écrire un programme permettant de vider les deux sacs.

La chose serait-elle possible si l'opération B était remplacée par : tripler le nombre de billes contenues dans un des sacs ?

Considérons les variables S et T qui contenant respectivement le nombre de billes du 1er sac et du 2nd. On note A(n) l'opération ôter n billes de chacun des sacs et B(S) (resp. B(T)) l'opération doubler ne nombre de billes du sac S (resp. T).
L'algorithme ci-dessous s'appuie sur le fait que : quel que soit l'entier n non nul, il existe un unique entier k tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$

```
si S > T
    alors échanger S et T
fin si              // ainsi, S contient le nombre de billes du sac le moins rempli et T le nombre de billes de l'autre sac
tant que S < T
    A(S-1)          // ainsi, S contient 1 et T contient T-S+1 (qui est compris entre 1 et T-1)
    tant que 2S ≤ T
        B(S)
    fin tant que    // à la fin de cette boucle, S contient la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à T
fin tant que        // à la fin de cette boucle, S=T (égaux à la même puissance de 2 ou au nombre initial si S=T dès le départ)
A(S)                // ainsi, S=T=0
```

On est certain que ce programme ne tournera pas indéfiniment. En effet, à chaque passage dans la 1ère boucle « tant que » la nouvelle valeur de T est strictement inférieure à la précédente. Ainsi, T contenant des valeurs entières positives, on a nécessairement un nombre fini de passage dans cette boucle. Enfin, si S≠T au départ, cette boucle « tant que » s'arrête dès que la dernière valeur prise par T est une puissance de 2 (éventuellement $2^0=1$) qui peut alors être atteinte par S (avec l'opération B).

Dans le cas où l'opération B est remplacée par « **tripler** le nombre de billes contenues dans un des sacs » on ne peut pas créer de tel programme. En effet, considérons deux nombres s et t de parité différente (par exemple s pair et t impair). Lorsque l'on applique l'opération A à s et t les nouvelles valeurs de s et t sont encore de parité différente et, comme tripler un nombre ne change pas sa parité lorsque l'on applique l'opération B à s ou à t, alors s et t sont encore de parité différente. Ainsi, il sera impossible de vider « en même temps » (avec l'opération A) les sacs s'ils contiennent un nombre de billes de parité différente au départ puisqu'ils contiendront toujours des nombres de billes de parité différente si on leur applique les opérations A et/ou B.

Thème Probabilités, logique, dénombrement, exercice 2
Proposition de corrigé d'un des groupes de collégiens
(augmenté de quelques justifications), par Christophe Deguil

Pour des raisons de "négatif" au sens photographique, il suffit de travailler pour 0, 1,2,3,4 carrés noirs.

1. On dénombre les carrés n'ayant qu'un seul représentant :

- Avec zéro carré noir :
  Une seule possibilité, rien n'est colorié. Il est unique !
- Avec un carré noir :
  Seul le cas où le carré central est colorié convient.
  Dans les autres cas il y a 4 représentants.
- Avec 2 carrés noirs :
  Aucune possibilité.
  Si la figure n'admet pas de centre de symétrie : il suffit de tracer le symétrique par rapport au centre du carré
  Si la figure admet un centre de symétrie il suffit de tracer le symétrique par rapport à une médiatrice, on obtient ainsi un autre représentant du schéma.
- Avec trois carrés noirs:
  Il suffit de tracer le symétrique par rapport au centre du carré pour obtenir un autre représentant. Il n'y a donc aucune possibilité.
- Avec quatre carrés noirs :
  Les 4 coins coloriés ou les 4 milieux coloriés donnent une solution. Ce qui donne deux solutions
  Toute autre proposition admettrait au moins un autre représentant en considérant une symétrie par rapport au centre du carré.

On déduit qu'il y a 4 schémas ayant de 0 à 4 carrés noirs, donc un total de 8 schémas n'ayant qu'un seul représentant.

2. On dénombre les carrés ayant deux représentants

Ces derniers possèdent un centre de symétrie : le centre du carré

- Avec un carré noir
  S'il est au centre il est unique
  S'il est sur un autre carré, il admet alors 3 autres représentant.
  Il n'y a donc aucune solution dans ce cas.
- Avec deux carrés noirs.
  Ils sont alors opposés par rapport au centre du carré. Il existe alors que deux configurations différentes (sommet -sommet) (milieu-milieu), ce qui donne deux solutions.
- Avec 3 carrés noirs:
  Un des carrés est le carré central. Il reste alors comme possibilité la diagonale et la médiatrice.
  Si le carré n'est pas central alors il ne peut y avoir de symétrie centrale. Tout autre configuration est donc impossible.
  Il y a donc dans ce cas deux solutions.
- Avec 4 carrés noirs :
  - Aucun ne peut être central, puisque alors il n'y aurait pas de symétrie centrale.
  - Si un carré est dans un coin, alors un autre est dans le coin diagonalement opposé. Il reste alors 3 places possibles (dans la partie supérieure à la diagonale passant par les sommets coloriés) pour le troisième carré. Si on le place dans un autre coin, alors les 4 carrés occupent les 4 coins et ce schéma est unique. Il reste pour le troisième carré que deux possibilités, à côté du coin déjà colorié.
    Ceci conduit à l'existence de deux schémas différents.
  - Si un carré est un milieu, alors son symétrique aussi, et il ne reste que les milieux des deux autres côtés pour les deux derniers carrés (le cas du coin ayant déjà été traité).

On déduit qu'il y a 6 schémas ayant 2 représentants possédant de 0 à 4 carrés noirs, soit un total de 12 schémas ayant exactement deux représentants.

3. Il ne peut y avoir d'éléments ayant trois représentants

En effet, si un élément à trois représentants, par rotation de 45° alors ce schéma admet un centre de symétrie.

4. On dénombre les carrés ayant 4 représentants

On a 2^9 motifs possibles soit 512.
Le nombre de motifs ayant 4 représentant est alors : 512 - 8 - 2 * 12 =480
Or 480 : 4 = 120
Il y a donc 120 motifs qui ont 4 représentants, soit 60 ayant des représentants avec 0,1,2,3 ou 4 carrés noirs.

Conclusion :

On a pour 0 à 4 carrés noirs, 4 schémas ayant un seul représentant, 6 schémas ayant deux représentants et 60 schémas ayant 4 représentants.
Donc 60+4+6=70 schémas différents.
Soit un total de 140 schémas différents.