Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

académie Versailles

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Stage olympique pour lycéens de première

20 et 21 décembre 2010

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

INRIA ROCQUENCOURT

Centre de recherche INRIA Paris Rocquencourt

La Pépinière académique de mathématiques est une initiative de l'académie de Versailles et de ses partenaires, l'INRIA (Centres de Paris Rocquencourt et de Saclay Île de France) et l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. Elle a reçu le soutien de l'Institut des hautes études scientifiques. Elle organise grâce à des bénévoles des stages destinés aux élèves intéressés et talentueux *désignés par leurs établissements*.

Emploi du temps

	Groupe A	**Groupe B**	**Groupe C**
Lundi 10 heures	**Fonctions et équations** CH & BB	**Fonctions et équations** KZ &IDG	**Fonctions et équations** MB & MP
Lundi 12 h 30	*Que cherche une chercheuse ?* (AC)		
Lundi 13 h 15	***Repas***		
Lundi 14 heures	*Outils pour la géométrie* (PM)		
Lundi 14 h 45	**Géométrie** PJ	**Géométrie** CH & BB	**Géométrie** KZ & IDG

Mardi 10 heures	*Sommes* (MFB)		
Mardi 11 heures	**Probabilités, nombres, combinatoire** AA	**Équations fonctionnelles Sommes** PJ	**Aires et espace** HD
Mardi 13 heures	***Repas***		
Mardi 13 h45	**Aires et espace** HD	**Probabilités, nombres, combinatoire** AA	**Équations fonctionnelles Sommes** CH & BB
Mardi 15 h 20	**Équations fonctionnelles Sommes** CH & BB	**Aires et espace** HD	**Probabilités, nombres, combinatoire** AA

Organisateurs, responsables et intervenants : Marie-Françoise BOURDEAU, Véronique MESSEANT, Évelyne ROUDNEFF, Pierre MICHALAK, Catherine HOUARD, Bruno BAUDIN, Mariane BOURGOING, Maud PARTIER, Karim ZAYANA, Isabelle de GRACIA, Philippe JULIEN, Anne ALLARD, Henri DUBOST, Aude CHUPIN

Thème 1 : Fonctions et équations

1. Soit *x, y* et *z* trois nombres tels que $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=7 \\ x^3+y^3+z^3=15 \end{cases}$. Calculer le produit *xyz*.

2. Déterminer pour quelle valeur de *x* l'expression $4\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ admet un minimum sur $]1;+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z+2}$ n'admet pas de solution (x,y,z) où *x*, *y* et *z* sont des entiers strictement positifs tels que $x \geqslant 4$.
   Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs qui sont solutions.

4. Existe-t-il deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ non constants dont les coefficients sont 0, 1 ou -1 et tels que $x^8-x+1=P(x)Q(x)$?

5. Soit $P(x)$ un polynôme. On dit que le polynôme $Q(x)$ est le polynôme récursif du polynôme $P(x)$ si pour tout réel *x*, $Q(x)=P(P(x))$. Trouver tous les triplets de réels (a,b,c) tels que le polynôme $Q(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+13$ soit le polynôme récursif d'un polynôme $P(x)$ à coefficients entiers.

6. Résoudre l'équation $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots\left(1+\cfrac{1}{x}\right)}}$ dans laquelle il y a 29 fractions successives.

   Par exemple pour une fraction l'équation aurait été $x=1+\frac{1}{x}$, pour 2 fractions $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}$, pour 3 fractions $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$.

7. **Partie A :**
   Déterminer tous les entiers naturels *x,y,z* vérifiant l'équation $x+y+z=xyz$
   Partie B :
   Pour *n* entier naturel non nul donné, on s'intéresse aux entiers naturels *x,y,z* vérifiant l'équation $x+y+z+n=xyz$.
   a. Montrer que les nombres *x,y,z* sont tous inférieurs ou égaux à $n+3$.
   b. On suppose que $z=n+3$. Déterminer les valeurs possibles de *x* et *y*.
   c. Quelle est la plus petite valeur de *n* pour laquelle on peut trouver des entiers naturels *x,y,z* strictement inférieurs à $n+3$, vérifiant $x+y+z+n=xyz$?

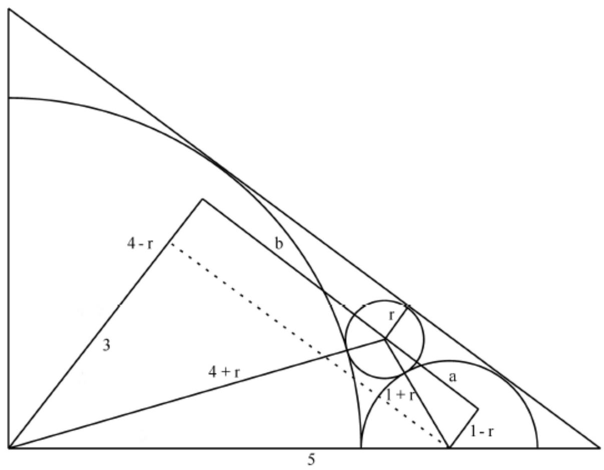
Thème 2 : Géométrie

1. **Le carré de la balançoire**

Dans un parc, un carré de côté $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ m est réservé pour l'aménagement d'une balançoire à bascule rudimentaire. Celle-ci sera construite à l'aide d'une planche de 0,25 m de large, la plus longue possible, dont le centre sera posé sur un billot de $4-2\sqrt{3}$ m de diamètre. Après avoir identifié la région du carré à utiliser, les constructeurs ont installé la planche et se sont rendu compte que quand elle touche au sol, d'un côté ou de l'autre, elle passe toujours par un même point P dont la distance avec le sol est de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m. Dans ce contexte, calculer la longueur de la planche sachant que l'extrémité de celle-ci doit être entièrement dans le carré au moment de son contact avec le sol.

2. **Un quart, un demi et un complet**

À l'intérieur d'un triangle rectangle, on retrouve un quart de cercle de rayon 4, un demi-cercle de rayon 1 et un petit cercle. Les portions de cercles sont tangentes entre elles et tangentes à l'hypoténuse du triangle tel qu'illustré sur la figure ci-contre.
Trouver le rayon du plus petit cercle.



3. Soit C_1 et C_2 deux cercles de centres distincts O_1 et O_2 et de rayons distincts R_1 et R_2, tangents extérieurement en un point A.

On appelle B le point de C_1 diamétralement opposé à A.
A tout point M de C_1, distinct de A et de B, on associe le point M' de C_2 tel que le triangle MAM' soit rectangle en A.

   a. Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe lorsque M décrit le cercle C_1 privé de A et de B.
   b. On appelle J le milieu du segment [MM']. Déterminer le lieu de J lorsque M décrit le cercle C_1 privé de A et de B.
   c. Quelle doit être la position de M pour que l'aire du triangle MAM' soit maximale ?

4. Soit un segment [AB] de longueur 4. Un point O peut se déplacer sur [AB].

O est l'origine d'une tige articulée constituée de deux segments [OI] et [IJ] tels que :
OI = 5 et [OI] peut pivoter librement autour de O.
IJ = 1 et [IJ] peut pivoter librement autour de I.

   a. Déterminer et représenter l'ensemble D des positions que peut prendre le point J lorsque O est en A.
   b. Déterminer et représenter l'ensemble E des positions que peut prendre le point J lorsque O se déplace sur [AB].
   c. Quelle est l'aire de E?

5. Dans les trois premières questions, on considère les fonctions f définies sur le plan, à valeurs dans **R**, et vérifiant la propriété (P) suivante :

Pour tout triangle équilatéral ABC, on a $f(A) + f(B) + f(C) = 1$

a. Donner un exemple d'une telle fonction.

b. Soit M et N deux points distincts.
   - Construire à la règle et au compas deux points A et B tels que les triangles MAB et NAB soient équilatéraux. Expliquer la construction.
   - Prouver que pour une fonction f vérifiant la propriété (P) on a $f(M) = f(N)$.

c. Trouver toutes les fonctions f vérifiant la propriété (P).

d. Déterminer toutes les fonctions f définies sur le plan, à valeurs dans **R**, telles que pour tout losange ABCD, on ait : $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 1$

Thème 3 : Equations fonctionnelles et sommes

1. Existe-t-il une fonction f de **N** dans **N** telle que pour tout entier naturel n : $f\left(f\left(n\right)\right)=n+1$?
2. Trouver toutes les fonctions de **R** dans **R** telles que pour tous réels x et y :
$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=1-x-y$$
3. La fonction f est définie sur **N** par :
$$f\left(n\right)=\begin{cases} n-3 \text{ si } n\geqslant 1000 \\ f\left(f\left(n+5\right)\right) \text{ si } n<1000. \end{cases}$$
Déterminer les images par f des entiers naturels inférieurs à 1 000.
4. Trouver toutes les fonctions f de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$ telles que :
pour tout $x>0$ et pour tout $y>0$ on a $f\left(xf\left(y\right)\right)=yf\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=0$.
5. Trouver toutes les fonctions f de **R** dans **R** telles que, pour tous nombres réels x et y :
$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+xf\left(y\right)+f\left(x\right)-1$$
6. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tous réels x, y, z, t, on ait ;
$$\left(f\left(x\right)+f\left(z\right)\right)\left(f\left(y\right)+f\left(t\right)\right)=f\left(xy-zt\right)+f\left(xt+yz\right).$$

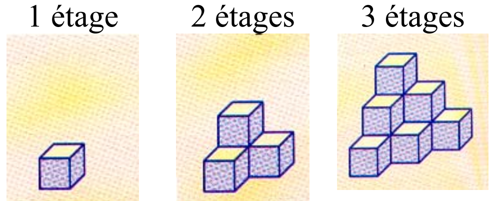
***

S1. Calculer la somme $S=\sum_{k=1}^{2010}k$.

En déduire la somme $S'=\sum_{k=1}^{2010}\left(-1\right)^{k+1}k^2\left(S'=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots-2010\right)$.

S2. On dispose de 50 jetons numérotés de 1 à 50. Est-il possible de regrouper ces jetons par paquets de façon que la somme des jetons de chaque paquet fasse 75 ?

S3. On considère les constructions suivantes, effectuées avec des cubes de même dimension :



Trouver le nombre d'étages de la construction, sachant qu'il y a 100 fois plus de cubes que d'étages.

S4. Le 1er avril 2011 vous gagnez à un jeu …
Le gain se présente de la manière suivante :
Tous les jours du mois en cours vous gagnez 300 000 €. Mais en contrepartie vous devez rembourser 1 cent le premier jour puis le double le second jour (2 cents) ; encore le double le troisième jour (4 cents) et ainsi de suite jusqu'au dernier jour du mois.

1. Avez-vous intérêt à accepter votre gain ?
2. Qu'en est-il si vous gagnez le 1er février ?

S5. Où est l'erreur ?

On pose : $S = 1 + \dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{4}{3}\right)^n + \ldots$

On en déduit que : $\dfrac{4}{3}S = \dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1} + \ldots$ donc $\dfrac{4}{3}S = S - 1$. D'où : $S = -3$.

S6. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ tels que : $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$?
2. Existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ tels que : $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k^2$?

S7. Calculer la somme $S = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \ldots + \dfrac{1}{998\times 999} + \dfrac{1}{999\times 1000}$.

Thème 4 : Probabilités, nombres, combinatoire

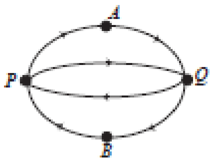
1. **Les minutes sont comptées**

   Pour le mois de février 2010, un fournisseur d'accès de téléphonie cellulaire décide d'organiser le tirage d'un certain nombre de minutes de temps d'appel. L'octroi des minutes se fera selon le tordu principe suivant :

   À chaque jour du mois de février le récipiendaire obtiendra un nombre de minutes décroissant représentant une fraction de 2010. Le premier jour, un lot de 2010 minutes sera divisé en 2, puis ensuite en 3 et le nombre de minutes résultantes sera octroyé. Le second jour, les 2010 minutes seront divisées en 3, puis en 4 et le résultat sera octroyé. Le troisième jour 2010 sera divisé en 4 puis en 5 et le résultat sera octroyé. Et ainsi de suite jusqu'à la fin du mois.

   Calculer le nombre total de minutes auquel correspond ce prix en supposant que les minutes sont comptabilisées sans perte de précision.

2. Combien peut-on tracer de chemins de P à Q en mettant bout-à-bout 12 flèches successives dans la figure suivante ?

   Exemple : *PAQPQPQBPAQP*Q est un tel chemin.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, la fraction $\frac{35n+7}{21n+4}$ est irréductible.

4. Sur la planète "Mathématic", les années ont toujours 365 jours et les mois ne peuvent avoir que 28,30 ou 31 jours.
   a. Montrer qu'une année "Mathématicienne" comporte toujours douze mois.
   b. Donner toutes les décompositions possibles d'une telle année en nombre de mois de 28, 30 ou 31 jours.

5. **Une souris pas commode**

   Jacob a une commode rectangulaire ayant 3 rangées de 3 tiroirs dans laquelle se cache régulièrement une souris. Elle choisit d'abord l'un des tiroirs au hasard puis, chaque fois que Jacob ouvre un tiroir pour vérifier si la souris s'y trouve et qu'elle n'y est pas, elle attend qu'il le referme et sort alors du tiroir où elle était afin de le narguer. Elle se cache ensuite dans l'un des tiroirs adjacents, horizontalement ou verticalement, qu'elle choisit toujours au hasard.
   a. Trouver la meilleure stratégie à employer pour que Jacob attrape le plus rapidement possible la souris.
   b. S'il se donne les meilleures chances possibles, calculer le nombre moyen d'essais nécessaires pour que Jacob attrape la souris.

6. **Générateur de nombres**

   Un programme génère des nombres aléatoires entre 0 et 1. Le programme est conçu de telle sorte que pour tout x de 0 à 1, la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que x est trois fois plus grande que celle qu'il génère un nombre plus petit que $\frac{x}{4}$. De plus, la probabilité qu'il génère un nombre plus grand ou égal à x est identique à la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que $\left(1-x\right)$.

   Calculer la probabilité que ce programme nous donne un nombre plus petit que $\frac{1}{21}$.

7. On peut relier les sommets d'un quadrilatère ABCD par des traits tracés en continu ou en pointillés de telle sorte qu'aucun des 4 triangles ayant ses sommets parmi les points A, B, C, D ne soit constitué de traits de même nature.
   a. Réaliser un tracé analogue pour un pentagone, c'est-à-dire un tracé dans lequel aucun des triangles ayant ses sommets parmi les sommets du pentagone ne soit constitué de traits de même nature.
   b. Un tracé analogue est-il possible dans le cas d'un hexagone?

8. Un entier $n \geqslant 2$ est "académique" si on peut répartir les entiers 1, 2, ..., n en deux groupes disjoints non vides S et P de sorte que la somme des nombres du groupe S est égale au produit des nombres du groupe P.
   Par exemple le nombre 7 est "académique" car $2 + 4 + 5 + 7 = 1\times3\times6$
   a. Prouver que $n = 4$ n'est pas "académique".
   b. le nombre 5 est-il "académique"? le nombre 6 est-il "académique"?
   c. Prouver que tout entier $n \geqslant 7$ est académique.

9. Pierrot s'amuse avec ses petits dinosaures-jouets en plastique. Il fait des *combats* entre ses bestioles, prises 2 à 2. Il se prépare à faire un combat entre la bestiole B_1 (un petit tricératops) et la bestiole B_2 (un petit tyrannosaure).
   Les règles du jeu sont les suivantes : les deux bestioles sont lancées en l'air, simultanément, et retombent sur le plancher. Chaque bestiole peut retomber **debout** ou **couchée**. Quand une bestiole tombe debout, elle mérite un point. Le vainqueur est le premier à être tombé 2 fois debout, si l'adversaire n'a pas encore réussi à tomber 1 fois debout. Il s'agit donc d'une course au premier qui accumule deux points (avec la convention qu'un score de 2 à 1, de 1 à 2 ou de 1 à 1 correspond à un *match nul*).
   Si on suppose que B_1 tombe debout, en moyenne, une fois sur trois lancers et que B_2 tombe debout, en moyenne, une fois sur quatre lancers, évaluer les trois probabilités suivantes :

$$P\left(B_1 \text{ gagne} \right), P\left(B_2 \text{ gagne} \right) \text{ et } P(\text{match nul}) .$$

Thème 5 : Aires et espace

1. Deux pyramides de même base carrée ABCD, de sommets respectifs E et F distincts, sont accolées par leur base et forment un octaèdre régulier, c'est-à-dire un solide formé de huit faces identiques qui sont des triangles équilatéraux.
On suppose que AB=1.
Montrer que les faces ABE et CDF sont parallèles et déterminer leur distance, c'est à dire la plus courte distance d'un point du plan (ABE) à un point du plan (CDF).

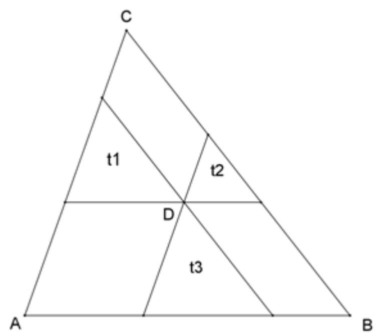
2. Soit un carré ABCD de côté a. Un cercle Γ, intérieur au carré, est tangent aux droites (AB) et (AD). Un second cercle Γ', intérieur, au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites (CB) et (CD).

Soit S la somme des aires des disques définis par Γ et Γ ' : quelles sont les valeurs maximale et minimale de S?

3. Par le point D, intérieur au triangle ABC, on trace des parallèles aux côtés de ce triangle, qui déterminent des triangles t1, t2 et t3.

On suppose que les aires des triangles t1, t2 et t3 sont respectivement 9, 4 et 49.

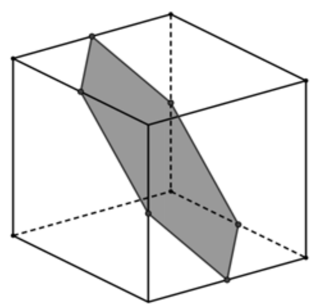
Quelle est l'aire du triangle ABC ?



Extension : Montrer que dans un tel découpage d'un triangle d'aire S, les aires S_1, S_2 et S_3 des petits triangles (elles ne sont plus explicitement données) vérifient : $S \leqslant 3\left(S_1 + S_2 + S_3\right)$.

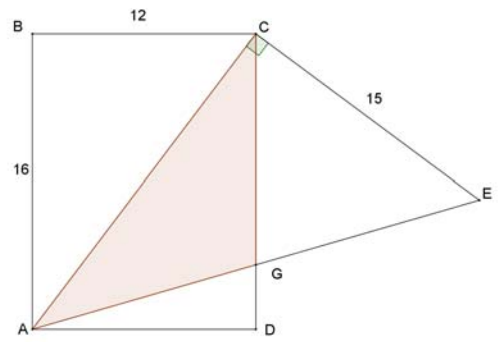
4. On considère un triangle ABC et un point P du côté [BC]. La parallèle à (AB) passant par P coupe le côté [AC] en Q. La parallèle à (AC) passant par P coupe le côté [AB] en R. Le rapport des aires des triangles BPR et BCQ est k^2. Quel est le rapport des aires des triangles ARQ et ABC ?

5. Le polygone dont les sommets sont les milieux de six arêtes d'un cube (figure ci-contre) est-il un hexagone régulier ?



6. Démontrer que dans un tétraèdre trirectangle (c'est-à-dire dont trois faces ayant un sommet commun sont des triangles rectangles en ce sommet commun) le carré de l'aire de la face qui n'est pas un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des aires des faces triangles rectangles.

7. Les dimensions sont données, et ABCD est un rectangle.
Quelle est l'aire du triangle ACG ?



8. Six carrés sont placés comme sur la figure ci-dessous. Montrer que la somme des aires des carrés « intérieurs » est le tiers de la somme des aires des carrés « extérieurs ».