Stage olympique pour lycéens de première

19 et 20 décembre 2011

Inria Paris Rocquencourt

La **Pépinière académique de mathématiques** est une initiative de l'académie de Versailles et de ses partenaires, l'INRIA (Centres de Paris Rocquencourt et de Saclay Île de France) et l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. Elle a reçu le soutien de l'Institut des hautes études scientifiques. Elle organise grâce à des bénévoles des stages destinés aux élèves intéressés et talentueux *désignés par leurs établissements*. Son action est strictement institutionnelle. Elle s'inscrit dans le Plan sciences ministériel, et notamment dans le projet MathC2+.

Emploi du temps

	Groupe A	Groupe B	Groupe C
Lundi 10 heures	**Fonctions et équations** KZ	**Fonctions et équations** AC+RF	**Géométrie plane** An. A+RB
Lundi 12 h 15	*Que cherche une chercheuse ?* (Ad. A)		
Lundi 13 heures	***Repas***		
Lundi 14 heures	*Conférence*		
Lundi 14 h 45	**Géométrie plane** An. A+RB	**Nombres** Ad. A	**Fonctions et équations** AC+RF

Mardi 10 heures	*Conférence*		
Mardi 11 heures	**Probabilités, combinatoire, stratégie** MS+CW	**Géométrie plane** RB	**Aires et espace** CH+BB
Mardi 13 heures	***Repas***		
Mardi 13 h45	**Nombres** KR	**Aires et espace** CH+BB	**Probabilités, combinatoire, stratégie** MS+CW
Mardi 15 h 20	**Aires et espace** CH+BB	**Probabilités, combinatoire, stratégie** MS+CW	**Nombres** KR

Organisation : Aurélie DARNAUD (Inria), Frédérique CHAUVIN (Rectorat de Versailles), Pierre MICHALAK (Rectorat de Versailles). **Responsables :** Marie-Françoise BOURDEAU, Véronique MESSEANT, Évelyne ROUDNEFF, Pierre MICHALAK (Inspection Pédagogique régionale de mathématiques). **Intervenants :** Catherine HOUARD, Bruno BAUDIN, Karim ZAYANA, Anne ALLARD, Martine SALMON, Aude CHUPIN , Adeline AUGIER, Richard BREHERET, Konrad RENARD, Romain FILLIAT, Christine WEILL et les professeurs accompagnant leurs élèves.

Nombres

N 1 L'étendue, la moyenne et la médiane d'une série de 8 entiers sont toutes égales à 8. Quel est le plus grand entier pouvant appartenir à cette série ?

N 2 Une suite d'entiers (a_n) est telle que $a_1 = 1$ et, pour tous les entiers positifs *m* et *n*, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$. Calculer a_{12}.

N 3 On considère 2011 fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_{2011}}{b_{2011}}$ dont les numérateurs sont des entiers naturels et les dénominateurs des entiers naturels non nuls. Démontrer que si α et β sont respectivement la plus petite et la plus grande de ces fractions, on a $\alpha \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2011}}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{2011}} \leq \beta$.

N 4 Soit x, y, z trois réels strictement positifs.

1. Démontrer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

2. Démontrer que si $x + y + z \leq 3$, alors $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$.

3. Si $x + y + z \geq 3$, a-t-on nécessairement $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$?

N 5 Déterminer tous les entiers *n* pour lesquels $\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$ est un entier

N 6 (*Olympiades 2005 Versailles*) Un nombre entier naturel quelconque peut être écrit comme la somme de puissances de 2. On a, par exemple, 6 = 4 + 2, mais aussi 6 = 2 + 2 + 1 + 1, ou encore 6 = 2 + 2 + 2.
Dans cet exercice, on s'intéresse aux décompositions dans lesquelles une même puissance de 2 apparaît au maximum deux fois (par exemple, la dernière décomposition proposée ci-dessus pour 6 ne convient pas). On note $d(n)$ le nombre de telles décompositions du nombre n .
1. Montrer que $d(6) = 3$.
2. Calculer $d(n)$ pour les entiers compris entre 1 et 5.
3. Calculer $d(10)$, $d(11)$, $d(21)$ et $d(22)$.
4. Prouver que $d(2005) = d(1002)$.
5. Calculer $d(2005)$.

N 7 Déterminer tous les triplets de nombres naturels (x, y, z) tels que :

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} + \frac{z}{13} = 0,946\,053\,946\,053\,\ldots$$

(le membre de droite est un nombre décimal illimité périodique, de période 6).

N 8 Trois nombres dont le produit vaut 1 sont tels que leur somme est égale à la somme de leurs inverses.
  a. Donner un exemple numérique où les trois nombres sont différents.
  b. Est-il vrai qu'au moins un des nombres vaut toujours 1? Si oui, le démontrer, si non, donner un contre-exemple.

N 9 Simon montre à Caroline la formule $f(n) = n^4 - 80n^2 + 100$ où $n \in \mathbf{N}$ en lui affirmant :
« Je suis certain que la valeur absolue d'un nombre obtenu par cette formule ne peut jamais être un nombre premier ». Caroline, qui prend un malin plaisir à le contredire, se dit qu'il doit bien exister au moins une valeur de *n* qui génère un nombre premier.

Prouvez qu'elle a raison, mais qu'une telle valeur est unique.

Équations, fonctions

FE 1 Arthur a écrit un nombre de six chiffres différents et l'a représenté par CARMEN.
Montrer que si CARMEN est divisible par 13, CAR − MEN est aussi divisible par 13.

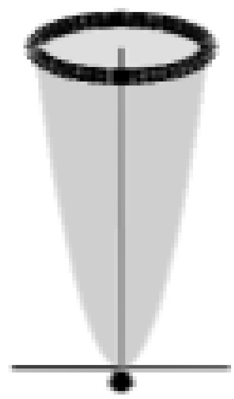
FE 2 Sachant que $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{5}$ combien vaut $a-\frac{1}{a}$?

FE 3 Dans sa caverne, Ali a trouvé un sac de *n* pépites d'or qui pèsent 1 gramme, 2 grammes, 3 grammes, 4 grammes, ..., *n* grammes. Sa femme veut exactement la moitié du poids total de l'or. Sans couper aucune pépite, Ali doit donc effectuer un partage en deux parts de même poids.
(a) Ce partage est-il possible si $n = 12$?
(b) Ce partage est-il possible si $n = 5$?
(c) Ce partage est-il possible si $n = 11$?
(d) Pour quelles valeurs de *n* le partage est-il possible ?

FE 4 Une bonne colle pour le grand Merlin

Lors d'un de ses nombreux tours de magie, le grand Merlin le magicien e verticalement des boules rigides de différents rayons l'une par-dessus l'autre et ensu les cache complètement à l'aide de son fameux chapeau magique.

Puis, lorsqu'il soulève son chapeau, il n'y a plus de boules. MAGIE ! ! !



Le truc : la partie creuse de son chapeau est un paraboloïde construit à partir de la révolution de la parabole d'équation $y = x^2$ autour de l'axe des *y* et dont la surface intérieure est collante. Les deux axes sont gradués en *talons* (unité de longueur dans le monde de la magie). Les boules sont des sphères toutes empilées pour que leurs centres soient sur l'axe central du paraboloïde tout en étant tangentes à la surface du paraboloïde, ce qui leur permet d'y coller.

Si la hauteur intérieure de son chapeau est de 16 *talons*, quel est le nombre maximal de boules que le grand Merlin peut faire disparaître ?

Équations fonctionnelles

Dans une équation fonctionnelle, l'inconnue est une fonction. Les exemples qui suivent peuvent se résoudre à l'aide de substitutions et de valeurs particulières (FE 6 et FE 7).

FE 5 On cherche à déterminer toutes les fonctions *f* définies sur R qui vérifient :
Pour tous réels *x* et *y*, $f\left((x-y)^2\right)=x^2-2yf(x)+\left(f(y)\right)^2$ **(1)**

1. Que devient la relation (1) :
a) pour $x = y = 0$?
b) pour $x = 0$?
c) pour $y= 0$?
c) Pour $x = y$?
2. Conclure

FE 6 Déterminer les fonctions *f* définies sur R telles que, pour tout *x* réel : $x^2 f(x)+f(1-x)=2x-x^4$.

FE 7 Soit *f* une fonction de **N** dans **N** telle que pour tout entier *n*, $f(n+1)>f(n)$ et $f\left(f(n)\right)=3n$.
Que vaut $f(2011)$?

FE 8 Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que pour tous réels *x* et *y*, $f\left(x+f\left(y^3\right)\right)=y+f\left(x^3\right)$.

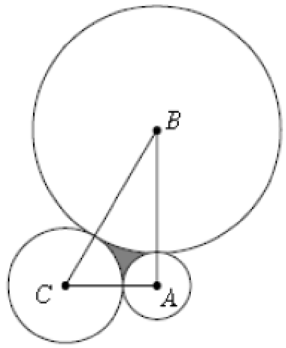
Géométrie plane

GP 1 On considère un losange L de côté a fixé et on appelle D et d les longueurs des deux diagonales
On pose : $S_1 = D + d$, $S_2 = D^2 + d^2$ et $P = Dd$.

1. Déterminer, s'il en existe, les losanges tels que S_1 soit maximal.
2. Déterminer, s'il en existe, les losanges tels que S_2 soit maximal.
3. Déterminer, s'il en existe, les losanges tels que P soit maximal.

On donnera les valeurs des maximums lorsqu'ils existent.

GP 2 On considère un triangle ABC rectangle en A tel que
BC = 12 et AC = 6.



Trois cercles de centres A, B et C , et sont tangents deux à deux sur les côtés du triangle ABC comme indiqué sur la figure ci-contre.

1. Calculer la distance AB.
2. Calculer les rayons des trois cercles.
3. Que vaut l'aire de la partie délimitée par les trois cercles (grisée sur la figure) ?

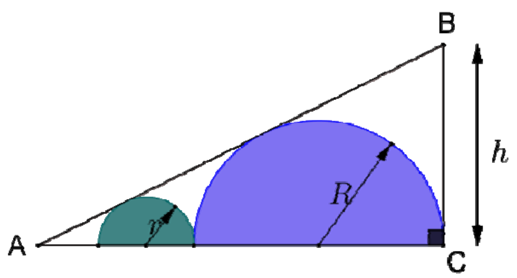
GP3 Soit ABC un triangle rectangle dans lequel $\widehat{ABC}$ mesurant 90°. Le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse est noté D et les pieds des perpendiculaires abaissées de D respectivement sur [BA] et [BC] sont notés E et F. Soient r_1, r_2 et r_3 les rayons des cercles inscrits aux triangles AED, EDF et FDC respectivement. L'égalité $r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$ est-elle toujours vérifiée ?

Indication **:** On pourra commencer par démontrer que, dans un triangle rectangle dont les longueurs des cathètes sont a et b et dont la longueur de l'hypoténuse est c, le rayon du cercle inscrit est $\dfrac{a+b-c}{2}$.

GP4 Soit ABC triangle inscrit dans un cercle de centre O. La hauteur issue de A coupe (BC) H. Le cercle de diamètre [AH] coupe (AB) en D et coupe (AC) en E. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la droite (DE).

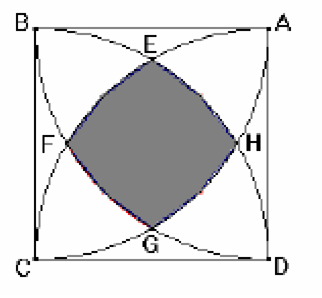
GP5 Sur la figure ci-contre, les demi-cercles de rayons r et R sont tangents entre eux et tangents à l'hypoténuse du triangle rectangle ABC, le demi-cercle de rayon R est également tangent à (BC). On pose h = BC.
Démontrer que :

$$\frac{R}{h} = \sqrt{\frac{r}{R}}$$



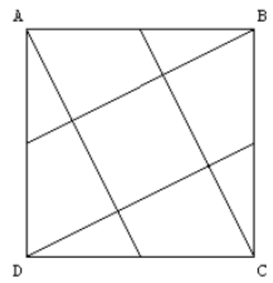
Aires et espace

AE 1 Un vitrail est formé d'un carré ABCD de côté a et de quatre quarts de cercle centrés respectivement aux sommets du carré et de rayon a comme l'indique la figure. La partie centrale est un quadrilatère curviligne EFGH.



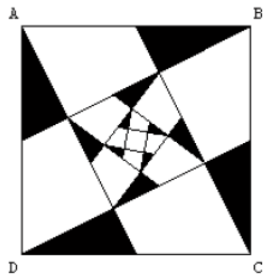
Déterminer l'aire de ce quadrilatère curviligne en fonction de a.
Olympiades académiques de Lille - 2004

AE 2 ABCD est un carré de côté 1.
À partir des milieux des côtés du carré ABCD, on construit la figure ci-contre.



1. Justifier que l'on a construit un petit carré à l'intérieur du carré ABCD. Quelle est la longueur de son côté ?

2. Dans la suite, on procède au même découpage des carrés ainsi construits et à chaque étape on colorie les quatre petits triangles formés, comme indiqué sur la figure ci-contre.
Montrer que l'aire de la partie colorée tend vers un quart de l'aire du carré ABCD lorsqu'on poursuit indéfiniment cette construction.
Olympiades académiques de Nancy-Metz - 2004



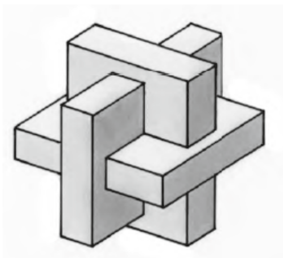
AE 3 On considère un polygone P_1 non croisé à n côtés ($n \geq 3$).
Soit P_2 le polygone non croisé dont les sommets sont les milieux des côtés de P_1.
On appelle A_1 l'aire du polygone P_1 et A_2 celle de P_2.

1. Démontrer que pour $n = 3$, le rapport $\frac{A_2}{A_1}$ ne dépend pas du polygone P_1.

2. Le rapport $\frac{A_2}{A_1}$ dépend-il de P_1 dans les cas suivants :
   a. $n = 4$? b. $n = 5$

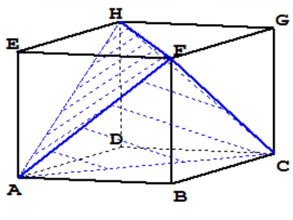
Justifier les affirmations et donner la valeur du rapport $\frac{A_2}{A_1}$ dans le cas d'une réponse positive.

AE 4 On imbrique 3 pavés droits pour obtenir le solide représenté ci-contre.
Les 3 pavés ont les mêmes dimensions : 2 cm × 8 cm × 10 cm.

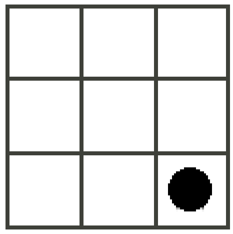


Calculer le volume de ce solide.

AE 5 Un pavé droit ABCDEFGH a un volume de 72 cm^3.
Quel est le volume du tétraèdre ACFH ?



Probabilités, combinatoire, stratégie



PCS 1 Dans la figure ci-contre, on a placé un jeton dans la case inferieure droite d'une grille 3 × 3. On lance une pièce de monnaie à plusieurs reprises. À chaque fois que la pièce indique face, le jeton est déplacé d'une case vers le haut ; à chaque fois que la pièce indique pile, le jeton est déplacé d'une
case vers la gauche. (le jeton peut être déplacé hors de la grille.) Déterminer la probabilité pour que le jeton se rende dans la case supérieure gauche de la grille.

PCS 2 Les faces d'un dé sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé trois fois de suite. Si le nombre obtenu au troisième lancer est égal à la somme des nombres obtenus aux deux premiers lancers, quelle est la probabilité que le nombre 2 soit apparu au moins une fois lors de ces trois lancers ?

PCS 3 On considère 5 entiers naturels non nuls a,b,c,d,e tels que $a > b > c > d > e$. Saurez-vous retrouver ces cinq nombres sachant que leurs sommes deux à deux sont : 17, 20, 28, 14, 42, 36, 28, 39, 25 et 31 ?

PCS 4 On rappelle que la somme des *n* premiers entiers naturels non nuls est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Montrer qu'avec un choix judicieux de + ou de – à la place des △, on peut obtenir :
△1 △ 2 △ 3 △......△ 99 △? 100 = 2012
2. Déterminer tous les entiers n pour lesquels on peut obtenir, selon le même principe :
△ 1 △ 2 △ 3 ?...... △ 99 △ 100 = *n.*

D'après les Olympiades académiques d'Orléans-Tours- 2004

PCS 5 Soit *n* un entier naturel supérieur à 2 et soient x_1, x_2, x_3, …, x_n des nombres réels non nuls de signes inconnus.

a. Développer l'expression $\left(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n\right)^2$.

b. Existe-t-il des valeurs de ces nombres réels qui rendent le nombre de doubles produits positifs égal au nombre de doubles produits négatifs
Si $n = 4$? Si $n = 2011$?

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur *n* pour que le nombre de doubles produits positifs soit égal au nombre de doubles produits négatifs.

Le principe des tiroirs

« Si vous disposez d'une commode avec 5 tiroirs et que vous devez ranger 6 objets, alors au moins un des tiroirs contiendra au moins 2 objets. ».

PCS 6 Soit *n* un entier divisible ni par 2 ni par 5. Montrer qu'il existe un multiple de *n* ne comportant que des 1.

PCS 7 Dans un repère du plan, on choisit cinq points à coordonnées entières. Montrer qu'au moins un des segments joignant deux de ces points contient un point à coordonnées entières.

PCS 8 On marque 6 points dans un rectangle de largeur 2 et de longueur 3. Montrer que deux de ces points se trouvent à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

PCS 9 On colorie les sommets d'un heptagone régulier en blanc et noir. Montrer qu'il y a trois sommets de même couleur qui forment un triangle isocèle. Qu'en est-il pour un octogone régulier ?