PAVAGES, DÉCOUPAGES ET COLORIAGES.

(Pierre Bornsztein, Octobre 2012.)

A travers quelques exercices, nous allons nous intéresser à des problèmes de pavages ou de découpages, ainsi qu'à quelques techniques classiques utilisées dans l'étude de ce type de questions. En particulier, nous verrons qu'à côté d'arguments prévisibles (parité, aire...), l'utilisation de coloriages judicieux permet parfois de résoudre certains d'entre eux.
Précisons une bonne fois que lorsque l'on pave une figure à l'aide de tuiles, cela s'effectue sans chevauchement des tuiles, sans qu'une tuile ne déborde de la figure et sans laisser de partie de la figure non recouverte par une tuile. De plus, sauf précision contraire, les tuiles peuvent être tournées ou retournées.

Exercice 1. On considère un échiquier 8×8. Est-il possible de recouvrir les cases restantes par des dominos si
a) on a enlevé une case de l'échiquier?
b) on a enlevé deux cases qui forment deux coins diagonalement opposés?
c) on a enlevé deux cases de couleurs différentes?

Exercice 2. Un carré 100×100 est divisé en 10.000 cases-unités par des droites parallèles à ses côtés. Sur une des cases est placé un jeton. Est-il possible de paver l'ensemble des autres cases par des pièces en forme de triangles isocèles rectangles d'hypoténuse de longueur 2, de sorte que les hypoténuses soient sur le bord de cases et les autres côtés des triangles sur les diagonales des cases?

Exercice 3. Un rectangle R est pavé par des tuiles rectangulaires, pas forcément identiques, mais ayant chacune un côté de longueur entière. Prouver que le rectangle R a lui-même un côté de longueur entière.

Exercice 4. On veut recouvrir un tableau 8×8 par des trominos 1×3.
1) Pourquoi faut-il qu'il y ait au moins une case non recouverte?
2) On se donne donc également une carré 1×1.
a) Prouver que, si l'on veut recouvrir le tableau à l'aide du carré 1×1 et de trominos, alors il n'y a que quatre positions possibles pour le carré 1×1.
b) Prouver que, pour chacune de ces quatre positions, le recouvrement est effectivement réalisable.

Exercice 5. Un tableau 9×9 a ses cases alternativement blanches et noires, et 40 sont blanches. On enlève 9 cases blanches quelconques. Prouver que l'ensemble formé des 72 cases restantes ne peut être pavé par 24 coins (un coin est un carré 2×2 dont on a enlevé une case).

Exercice 6. Est-il possible de paver un rectangle 39×55 par des rectangles 5×11?

Exercice 7. Soient $m, n > 0$ des entiers. Prouver qu'un rectangle $m \times n$ peut être pavé par des pièces en forme de L si et seulement si mn est un multiple de 8 (un L est formé par deux dominos collés à angle droit).

Exercice 8. On veut paver un rectangle 6×6 par des dominos. S'il existe une droite qui traverse l'intérieur du rectangle sans traverser l'intérieur de domino, on dit que pavage est *cassable*. Prouver que, quel que soit le pavage choisi, celui-ci est cassable.

Exercice 9. Un octogone régulier convexe est pavé par des parallèlogrammes. Prouver que parmi ces parallèlogrammes, il y a au moins deux rectangles.

Exercice 10. On considère deux carrés A et B de mêmes dimensions, le carré A ayant ses diagonales horizontales et verticales, alors que le carré B a ses côtés horizontaux et verticaux. Est-il possible de découper A en un nombre fini de morceaux puis, en translatant indépendamment chacun de ces morceaux, de reformer le carré B?

Exercice 11. A l'aide de coups de ciseaux rectilignes, on découpe le triangle T et son intérieur en un nombre fini de morceaux, puis on translate chacun de ces morceaux à l'aide d'une translation appropriée pour reformer exactement, et sans chevauchement, le triangle T' et son intérieur.
Prouver que cela pouvait se réaliser en utilisant la même translation pour chaque morceau, c.à.d. que T' est lui-même un translaté de T.