Géométrie 1

Exercice 1

1. Cinq cercles de rayon 1 cm ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin ci-contre. Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré. Déterminer la longueur d'un côté du carré.
2. On se propose de déterminer la longueur du côté du plus petit carré contenant cinq disques de rayon 1 cm ayant un point commun au plus.
   a. Déterminer et représenter sur la figure 2, l'ensemble des points qui peuvent être les centres de disques de 1 cm de rayon et contenus dans le carré.
   b. Quel est le côté du plus petit carré contenant deux points distants de 2 cm ?
   c. Quel est le côté du plus petit carré contenant cinq points distants deux à deux d'au moins 2 cm ?
3. Conclure.

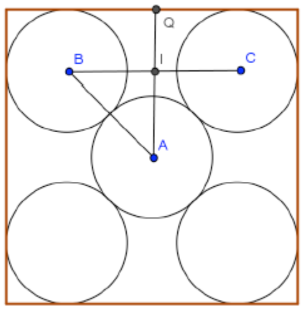


Figure 1

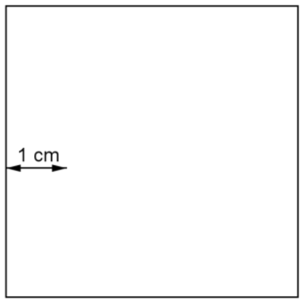
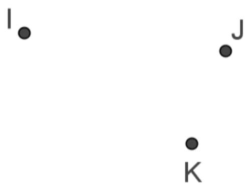


Figure 2

Exercice 2 Sauriez-vous reconstituer :

a. un triangle ABC à partir des milieux I, J, K de ses côtés ?



b. un pentagone ABCDE à partir des milieux I, J, K, L, M de ses côtés ?

Exercice 3

Soit M un point intérieur à un triangle équilatéral de côté a et de hauteur h. On désigne par H, K et L les projetés orthogonaux du point M sur les côtés du triangle.

1. Démontrer que MH + MK + ML = h.

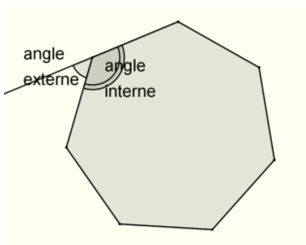
2. Dans quelle région du plan faut-il placer M pour que des segments de longueurs respectives MH, MK et ML puissent former un triangle ?

Exercice 4

Un point M est intérieur au carré ABCD. Les distances de M aux sommets A, B, C valent respectivement 2, 7 et 9. Que vaut la distance MD ?

Exercice 5

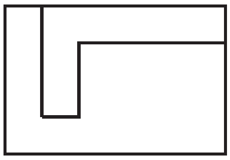
Nous dirons que deux polygones réguliers sont « correspondants » si le double de l'angle interne de l'un est égal au triple de l'angle externe de l'autre. Déterminer les couples de polygones réguliers correspondants.



Géométrie 2

Exercice 1

A rectangle is cut by segments parallel to its sides into a hexagon and an octagon as shown in the diagram (not drawn to scale).



The lengths of the sides of the octagon are 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 and 8 units in some order.

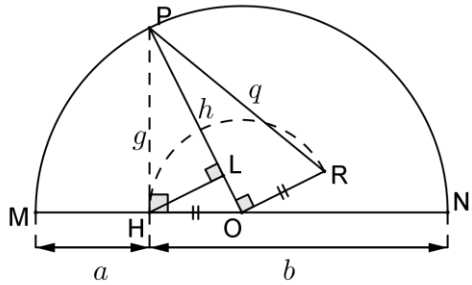
What is the maximum area, in square units, of the hexagon ?

Australian mathematics competition warm-up paper senior 7 (2009)

Exercice 2

Soit a et b deux réels strictement positifs, [MN] un segment de milieu O et de longueur $a + b$, H le point du segment [MN] tel que MH = a. Soit C l'un des deux demi-cercles de diamètre [MN]. On construit successivement les points P de C puis L et R tels qu'indiqués sur la figure codée ci-contre. On pose : m = OM, g = HP, h = LP et q = RP.

Exprimer m, g, h, q en fonction de a et b et les ranger par ordre croissant.



Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. On considère l'hyperbole H d'équation $y = \frac{1}{x}$. Soit A, B, C trois points de H, deux à deux distincts.

1. Les points A, B, C peuvent-ils être alignés ?
2. En supposant que ABC soit un « vrai » triangle, démontrer que son orthocentre est un point de H.

Exercice 4

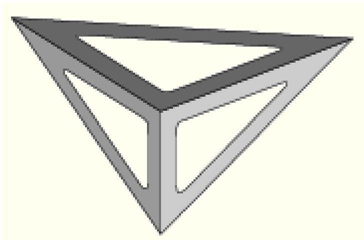
2050 abeilles sont enfermées dans une boîte cubique d'un mètre d'arête.

Montrer qu'à tout moment, il y a une boule sphérique de rayon $\frac{1}{9}$ m où se trouvent au moins 5 abeilles.

Indication : Quel est le nombre moyen d'abeilles dans un cube d'arête $\frac{1}{8}$ m ?

Exercice 5

La figure ci-contre représente deux équerres identiques de 30°- 60° assemblées le long de leurs côtés les plus courts (de longueur 10 cm), et au dessus desquelles on a posé une équerre 45°. Y a-t-il suffisamment de place à l'intérieur du tétraèdre ainsi obtenu pour une balle de tennis de rayon 3,2 cm?



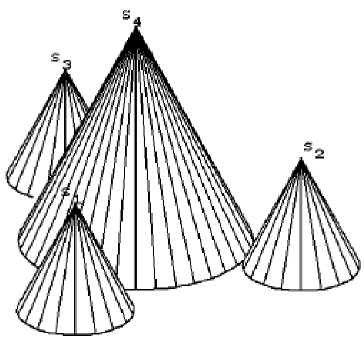
Exercice 6

Quatre cônes sont posés sur le sol.

Les trois cônes de sommets S1, S2 et S3 sont identiques. Leur hauteur est égale au rayon r de leurs cercles de base et les centres de ces cercles sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1.

La hauteur du cône de sommet S4 est égale au diamètre de son cercle de base et celui-ci est tangent extérieurement aux cercles de base des trois autres cônes.

Les quatre cônes sont opaques. Quelle condition doit vérifier r pour que, depuis le sommet de chacun des quatre cônes, les trois autres soient visibles ?



Nombres et équations

Exercice 1

J'ouvre un dictionnaire à une page. Je sais que la moyenne des autres pages est de 1000,743. Combien y a-t-il de pages dans ce livre et quelle page ai-je choisie ?

Exercice 2

Soit *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* et *x* neuf entiers relatifs tous distincts et tels que :

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)(x-g)(x-h)=2013^2$.

Calculer *x* en fonction de *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*

Exercice 3

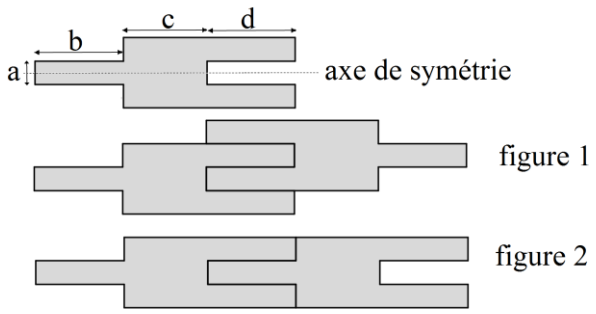
Pour combien d'entiers *n* le nombre $\dfrac{n}{20-n}$ est-il le carré d'un entier ?

Exercice 4

Quel est le plus petit entier naturel qui augmente de 50% lorsqu'on transfère le chiffre de gauche à droite ?

Exercice 5

Le motif de frise dessiné ci-contre présente un axe de symétrie horizontal. Les dimensions a, b, c, d indiquées sont des nombres entiers de cm. Calculer a, b, c et d sachant que le périmètre de la figure 1 est égal à 228 cm tandis que celui de la figure 2 est de 260 cm.



Exercice 6

70 vaches mangeraient l'herbe d'un pré en 24 jours, alors que 30 vaches mangeraient l'herbe de ce même pré en 60 jours. Combien faudrait-il de vaches pour manger l'herbe de ce pré en 96 jours ?

Exercice 7

Une caisse cubique de 70 centimètres de côté est posée contre un mur. On appuie contre le mur une échelle de 2,5 mètres qui est en contact avec la caisse. A quelle hauteur maximale l'échelle peut-elle s 'appuyer sur le mur ?

Exercice 8

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note *n*! (on lit « factorielle *n*) le produit des *n* entiers consécutifs de 1 à *n*. $\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\ldots \times 2 \times 1}$. Exemple : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Déterminer la valeur de *n* pour laquelle $n! = 2^{15} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$.

Exercice 9

1. Soit *a* un nombre strictement positif. Développer $\left(1+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}\right)^2$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel *n* non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{n(n+2)}{n+1}$

Probabilités

Exercice 1

Camille a fabriqué trois dés cubiques. Chaque face de chaque dé comporte un nombre de 1 à 9, tous utilisés. Sur chaque dé apparaissent trois nombres, chaque nombre apparaît deux fois. Si on lance les dés A et B, la probabilité pour que le nombre du dé A soit supérieur au nombre du dé B est de $\frac{5}{9}$. De même, la probabilité pour que B l'emporte sur C est de $\frac{5}{9}$ et celle pour que C l'emporte sur A est de $\frac{5}{9}$. Quelles sont les valeurs portées par chaque dé ?

Exercice 2

Un restaurateur avec les 20 couverts de sa salle, une compagnie aérienne avec 200 sièges à bord de ses avions moyen courrier et le gérant d'un stade contenant 2000 places constatent que 5% en moyenne des personnes qui ont pris des réservations font faux bond le jour venu. Ils délivrent respectivement 21, 210 et 2100 réservations. Quel est celui des trois qui a la plus forte probabilité de ne pas pouvoir accueillir tous ses clients ?

Exercice 3

Sacha veut acheter deux poissons pour son nouvel aquarium. Le vendeur lui dit que s'il tire au hasard deux poissons dans son vivier, la probabilité pour qu'il y ait un mâle et une femelle est de 0,5. En d'autres termes, poursuit le vendeur, sur toutes les façons de tirer deux poissons, il y en a autant qui donnent deux poissons de même sexe et deux poissons de sexes opposés.

1. Pendant que le vendeur lui expose ses théories probabilistes, Sacha compte discrètement 50 poissons dans le vivier. « Vous vous trompez » lui répond Sacha. Pourquoi ?
2. En réalité, il y a 49 poissons et non 50 dans l'aquarium. Peut-on toujours affirmer que le vendeur s'est trompé ?

Exercice 4

J'ai fabriqué la maquette d'un polyèdre convexe régulier qui comporte *n* faces que je numérote de 1 à *n*. Je lance ce polyèdre à la manière d'un dé et je note le numéro de la face sur laquelle il repose sur la table. La probabilité d'obtenir un numéro quelconque est la même pour tous les numéros. Je constate qu'après de très nombreux lancers, il faut un nombre moyen de lancers voisin de 72 pour obtenir au moins une fois tous les entiers de 1 à *n*. Comment s'appelle ce polyèdre ?

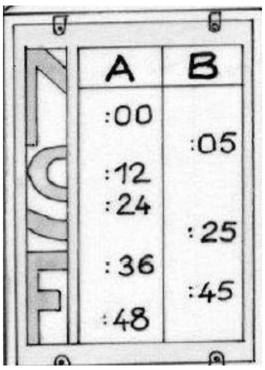
Exercice 5

Sacha doit expédier deux objets dans un pays où un paquet sur dix n'arrive jamais à destination. Les objets valent respectivement 100 € et 150 €. Il hésite entre faire un seul paquet avec les deux objets ou faire deux paquets séparés. Que lui conseillez-vous ?

Exercice 6

Ce matin-là, Émilie arrive à l'arrêt de bus sans savoir l'heure qu'il est. Deux lignes A et B lui permettent de parvenir à sa destination.

- Sur la ligne A, un bus passe toutes les 12 minutes.
- Sur la ligne B, un bus passe toutes les 20 minutes.



Les horaires d'arrivée des bus, valables pour toutes les heures de la journée, figurent sur le tableau ci-contre.

Tous les bus marquent un temps d'arrêt d'une minute. Émilie attend le bus et se pose des questions :

- « Quelle est la durée d'attente maximale possible ?
- Quelle est la probabilité que la durée d'attente soit supérieure à 5 minutes ? »

Fonctions

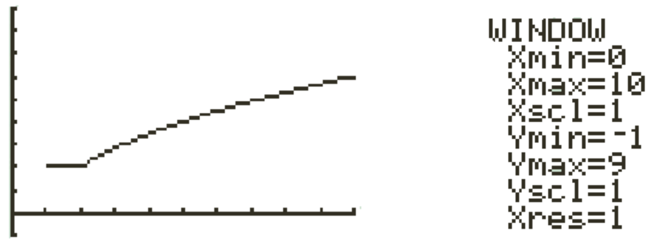
Exercice 1

x étant un réel, on pose :

$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Simplifier l'écriture de $f(x)$



Représentation graphique de la fonction f à l'écran d'une calculatrice

Exercice 2

A tout entier naturel n on associe $f(n)$ le plus petit chiffre figurant dans l'écriture de n dans le système décimal.

Exemple : $f(2013) = 0$, $f(95\,376) = 3$. Calculer : $\sum_{k=10^9}^{10^{10}-1} f(k)$.

Exercice 3

On choisit un nombre réel x et un entier n. Montrer que parmi les nombres x, $2x$, $3x$, ……….$(n-1)x$, il y en a au moins un qui est distant d'un nombre entier de moins de $\frac{1}{n}$.

Exercice 4 Soit $f : x \mapsto x+1$ définie sur **R** et $g : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Par applications successives de f ou g, obtenir la fraction $\frac{7891}{1987}$ à partir de 1.

La suite des opérations nécessaires est elle unique ?

Exercice 5 Soit f et g deux fonctions définies sur **R** et telles que :

- g est impaire
- Pour tout réel x, $f(x) \leq g(x)$
- Pour tous réels x et y, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

Démontrer que f est une fonction impaire.

Exercice 6 Soit f une fonction définie sur **R** telle que pour tous nombres réels x et y : $f\left(x-y\right)=f(x)+y$.

Démontrer que f est une fonction affine.

Exercice 7 Cet exercice a pour objet de déterminer toutes les fonctions f de $]0;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$ qui vérifient :

Pour tout $x > 0$ et pour tout $y > 0$, $f\left(xf(y)\right)=yf(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution du problème.

2. Dans cette question, l'objectif est de démontrer que seule la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution du problème.

a) Démontrer que pour tout $x > 0$, $xf(x)$ est un point fixe de f (a est point fixe de f signifie que $f(a) = a$).

Calculer $f(1)$.

Les questions suivantes ont pour but de démontrer que le seul point fixe de f est 1.

b) Démontrer les égalités suivantes :

Pour tout $x > 0$ et tout $z > 0$, $f\left(f(x)\right)=x$, $f(xz)=f(x)f(z)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$

c) En déduire que 1 est le seul point fixe de f et conclure.

Suites

Exercice 1

En partant des deux entiers 2012 et a, on prolonge la suite en faisant à chaque fois la différence entre l'avant-dernier et le dernier terme. On s'arrête dès qu'on a obtenu un terme négatif.

Ainsi, avec a = 1500 on obtient : 2012, 1500, 512, 988 ,– 476.

Comment choisir le deuxième terme a pour que la suite soit la plus longue possible ?

Exercice 2

Dans une compétition sportive qui a duré n jours (n >1), m médailles ont été distribuées. Le premier jour on a distribué une médaille plus $\frac{1}{7}$ des $m-1$ médailles restantes. Le deuxième jour, on a distribué 2 médailles plus $\frac{1}{7}$ du nouveau reste et ainsi de suite de telle manière que le $n$ième jour on a distribué exactement les n médailles qui restaient. Déterminer m et n.

Exercice 3

Soit n un entier positif. Une rangée de n + 1 carrés est numérotée de gauche à droite tel qu'illustré ci-dessous.

0	1	2	$\cdots$	n

Deux grenouilles appelées Alphonse et Béryl commencent une course à partir du carré 0. Chaque seconde, Alphonse et Béryl font un saut vers la droite selon les règles suivantes : s'il y a au moins huit carrés à la droite d'Alphonse, alors ce dernier doit sauter huit carrés vers la droite; sinon, il saute d'un carré vers la droite. S'il y a au moins sept carrés à la droite de Béryl, alors elle doit sauter sept carrés vers la droite; sinon, elle saute d'un seul carré vers la droite. A(n) et B(n) désignent respectivement le nombre de secondes qu'il faut à Alphonse et à Béryl pour atteindre le carré n. Par exemple, A(40) = 5 et B(40) = 10.

(a) Déterminer un entier n > 200 pour lequel $B(n) < A(n)$.

(b) Déterminer le plus grand entier n pour lequel $B(n) \leq A(n)$.

Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life 2011

Exercice 4

1. Soit (a_n) une suite numérique telle que pour tous entiers naturels m et n tels que $m \geq n$

$$a_{m-n} + a_{m+n} = \frac{1}{2}a_{2m} + \frac{1}{2}a_{2n}.$$

   a) Démontrer que $a_0 = 0$.

   b) Sachant que $a_1 = 1$, déterminer a_2 et a_3.

2. Soit (b_n) une suite numérique telle que pour tous entiers naturels m et n tels que $m \geq n$,

$$b_{m-n} + b_{m+n} = b_{2m} + b_{2n}.$$

Démontrer que la suite (b_n) est constante.

Exercice 5 Soit x un réel. x désigne la partie entière de ce réel

Soit x_1 un entier naturel. On pose : $x_2 = x_1 + \left[\sqrt{x_1}\right]$, et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + \left[\sqrt{x_n}\right]$.

Démontrer qu'à l'issue d'un certain nombre d'opérations, on obtient toujours un carré parfait.