Stage des 21 et 22 décembre 2015
Éléments de solution
Thème : Nombres et dénombrement

1. Carrés un peu magiques

3	9	12	6	1
5	11	14	7	2
10	22	28	21	16
15	27	33	26	21
20	36	44	37	32

2. Hausse et baisse
78 *M* = *N* = 116 *P* montre que *N* est un multiple commun à 78 et 116. Le plus petit multiple commun à ces deux nombres est 4 524. Ce qui donne *M* = 5 800 et *P* = 3 900. Tous les produits de ces trois nombres par un même entier non nul conviennent aussi.

3. Tennis
En coupant « dans la longueur », sur chaque ligne on peut couper 100 des 101 côtés des carrés. Au total on couperait 1 000 segments. Chaque ligne de ficelle reste reliée à la précédente par un brin. En coupant « dans la hauteur », sur chaque colonne on peut couper 10 des 11 côtés des carrés, et il y a 100 colonnes, on couperait donc 1 000 segments.

4. Fabrique de nombres
La suite des décimales de l'écriture d'un rationnel est périodique. Dans le procédé de construction, les puissances de 10 sont les seuls entiers à produire des suites de 0, et ces suites n'ont pas la même longueur.

5. Bleu, blanc, rouge
Premier protocole : 10 fois 10 possibilités pour placer les jetons rouges, puis 10 fois 9 possibilités pour placer les bleus. En tout $10^{10} \times 9^{10}$.
Second protocole : 10 fois 10 possibilités pour placer les jetons rouges, mais pour placer les jetons bleus, le nombre de possibilités est un produit d'entiers inférieurs à 10 dont la somme est 90.

6. Promiscuité
Il y a $\frac{n^2(n^2-1)}{2}$ parties à deux éléments dans un ensemble à n^2 éléments. Chaque ligne contient $(n-1)$ paires de cases contiguës, cela en fait donc $n(n-1)$. Il y en a autant en colonne (sans redondance avec les précédentes). Au total, il y a $2n(n-1)$ paires de cases contiguës. La probabilité envisagée s'écrit donc $= \frac{4n(n-1)}{n^2(n^2-1)}$, ou encore $p = \frac{4}{n(n+1)}$. On doit donc résoudre : $4\,000 < n(n+1)$, dont la solution est $n \geq 63$.

7. Balbutiement
On regarde comment construire une telle chaîne. On se donne un entier n et on considère l'ensemble des chaînes « bien constituées » - c'est-à-dire sans faire apparaitre trois caractères consécutifs identiques -. On note $S(n)$ l'effectif de cet ensemble.
Parmi les chaînes bien constituées comportant n caractères (n étant supérieur à 3), certaines se terminent par 10 ou 01. Notons $D(n)$ leur effectif. Certaines se terminent par 00 ou 11. Notons $B(n)$ leur effectif. Pour obtenir une suite bien constituée de $n+1$ termes, on peut compléter par un 0 ou par un 1 une suite du premier type, en revanche il n'y a qu'une seule manière de compléter une suite du second type. $S(n+1) = 2D(n) + B(n)$.
D'autre part, $S(n) = D(n) + B(n)$, bien sûr, et $D(n) = S(n-1)$, car il n'y a qu'une seule façon d'ajouter 1 ou 0 à une suite pour qu'elle se termine par 01 ou 10. Finalement : $S(n+1) = S(n) + S(n-1)$. Reste à déterminer $S(3)$ et $S(4)$, qu'on trouve respectivement égaux à 6 et 10. On trouve 178 suites bien constituée de 10 termes.

8. Moyenne Il y a un de ces ensembles dont le plus petit élément est 11, il y en a 10 dont le plus petit élément est 10 (on le complète par tous les nombres plus grands sauf un), $\binom{11}{2}$ dont le plus petit élément est 9, etc. jusqu'à $\binom{19}{9}$ dont le plus petit élément est 1. On doit donc calculer la somme

$$11 \times 1 + 10 \times \binom{10}{9} + 9 \times \binom{11}{9} + 8 \times \binom{12}{9} + \cdots + 2 \times \binom{18}{9} + 1 \times \binom{19}{9}. \quad (*)$$

La moyenne cherchée est le quotient de cette somme par l'effectif total

$1 + \binom{10}{1} + \binom{11}{2} + \binom{12}{3} + \cdots + \binom{18}{9} + \binom{19}{10}$ (on est passé sans le dire aux complémentaires)
Pour calculer cet effectif total, on utilise une des propriétés du triangle de Pascal. L'égalité fondamentale :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Fournit l'égalité dite de la crosse de hockey (hockey stick identity), on a en particulier

$$1 + \binom{10}{1} + \binom{11}{2} + \binom{12}{3} + \cdots + \binom{18}{8} + \binom{19}{10} = \binom{20}{10}$$

1	7	21	35	35	21	7	1								
1	8	28	56	70	56	28	8	1							
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
1	13	78	286	715	1287	1816	1816	1287	715	286	78	13	1		
1	14	91	364	1001	2002	3103	3632	3103	2002	1001	364	91	14	1	
1	15	105	455	1365	3003	5105	6735	6735	5105	3003	1365	455	105	15	1
1	16	120	560	1820	4368	8108	12842	13470	12842	8108	4368	1820	560	120	16
1	17	136	680	2380	6188	12376	20950	26312	26312	20950	12476	6188	2380	680	136
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876
1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125960	77520	38760	15504

Vue partielle du triangle de Pascal. Illustration de l'identité de la crosse de hockey

Pour calculer la somme (*), on la décompose en sommes partielles, dont la première contient 11 termes, la deuxième 10, etc. la onzième un :

$S_1 = 1 + \binom{10}{1} + \binom{11}{2} + \binom{12}{3} + \cdots + \binom{18}{9} + \binom{19}{9} = \binom{20}{10}$,
$S_2 = 1 + \binom{10}{9} + \binom{11}{9} + \binom{12}{9} + \cdots + \binom{18}{9} = \binom{19}{9}$,
$S_3 = 1 + \binom{10}{9} + \binom{11}{9} + \binom{12}{9} + \cdots + \binom{17}{9} = \binom{18}{8}$,
La somme pondérée des minimums est donc :
$S = \binom{20}{10} + \binom{19}{9} + \cdots + \binom{12}{2} + \binom{11}{1} + 1$, à laquelle on peut encore appliquer l'identité. On a donc $S = \binom{21}{10}$
Enfin, la moyenne est $m = \frac{\binom{21}{10}}{\binom{20}{10}} = \frac{21}{11}$

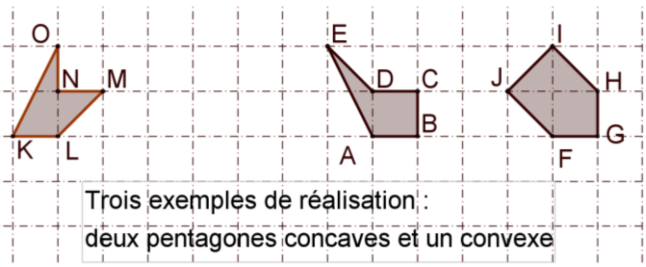
9. Dans le 1 000

Écrivons ces nombres sous la forme $\frac{p}{q}$. p et q sont premiers entre eux, $p = 1\,000 - q$ et $p < q$. La fraction $\frac{p}{1\,000-p}$ est irréductible : les diviseurs de p qui divisent $1\,000 - p$ divisent 1 000. p n'est donc ni pair, ni multiple de 5, et inférieur à 500. Il reste $500 - 250 - 100 + 50$ (car les multiples de 10 ont été comptés deux fois). Le nombre cherché est donc 200.

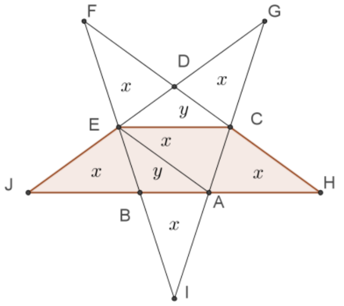
Thème : Aires et volumes

1. Pentagone

Il n'y a que quatre couples possibles pour la répartition de la parité des coordonnées : $(p,p), (p,i), (i,p), (i,i)$.
Donc deux des sommets du pentagone ont leurs deux coordonnées de même parité.
La plus petite aire d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières est $\frac{1}{2}$ (il y a au moins un côté de longueur 1 et une hauteur de longueur 1). On choisit les trois premiers points, puis un quatrième, puis un cinquième, trois triangles ont été nécessaires. Si on



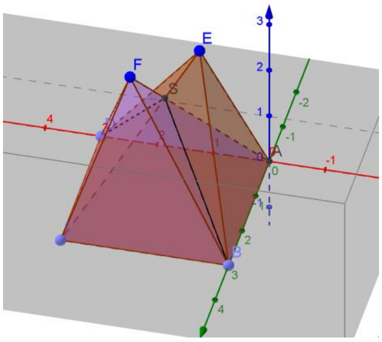
Trois exemples de réalisation : deux pentagones concaves et un convexe s'autorise les pentagones croisés, on peut parvenir à réunir seulement deux triangles. Si on s'interdit les pentagones concaves, quatre sommets consécutifs ne peuvent être les sommets d'un carré.



2. Encore un pentagone

Découpons la figure en triangles « comparables » d'aire x ou y. Les triangles ABI, AHC, CGD, DFE et EJB sont en effet superposables. Les triangles CAH et CAE sont symétriques par rapport à (CA), car les angles à la base mesurent 72°. Les triangles DEC et ABE sont eux aussi superposables. L'aire totale de l'étoile est $6x + 2y$ et l'aire de la partie colorée est $3x + y$.

3. Des montagnes qui se rencontrent

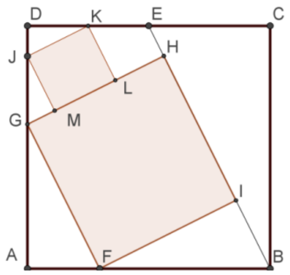


Inspiré par la figure ci-contre, on peut essayer de montrer que l'intersection des deux pyramides est une pyramide.

On se place dans le plan ACE, lequel contient aussi le point F. On trouve que les droites (AF) et (CE) ont pour point d'intersection le point S, de coordonnées $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}$

La pyramide intersection (là, il y a quelque chose à montrer) a dont pour hauteur $\frac{9}{4}$ et sa base est le carré ABCD. Son volume est donc $\frac{27}{4}$

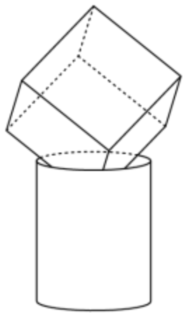
4. Carrés gigognes



Les triangles ECB, BIF, FAG et GMJ et JDK sont semblables (triangles rectangles ayant les mêmes angles). La suite des longueurs de leurs côtés est proportionnelle à la suite $\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}}{2}$

On a notamment $\frac{AF}{GF} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\frac{FB}{FI} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et donc, comme $GF = FI$, $\frac{GF}{\sqrt{5}} + GF\frac{\sqrt{5}}{2} = 1$, si on prend pour unité le côté du carré. On trouve donc $= \frac{2\sqrt{5}}{7}$. Le même raisonnement vaut pour les triangles GMJ et JDK, et donne $JM = \frac{2\sqrt{5}}{7}GD$. Finalement $FI = \frac{2\sqrt{5}}{7}$ et$JM = \frac{2\sqrt{5}}{7} \times \frac{3}{7}$. Le rapport des aires des deux carrés est donc $\frac{9}{49}$

5. Jeux au bain

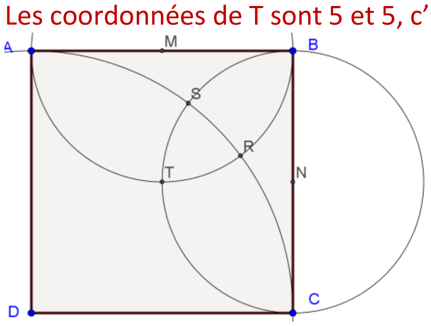


La partie immergée du cube est un tétraèdre dont la hauteur issue d'un des sommets du cube est la diagonale principale de celui-ci. Le triangle équilatéral qui sert de base est inscrit dans le cercle de rayon 4. Son côté est donc $4\sqrt{3}$. Les triangles rectangles isocèles dont l'hypoténuse est $4\sqrt{3}$ ont des côtés de longueur $2\sqrt{2}\sqrt{3}$, ce qui est inférieur à l'arête du cube (sinon, le cube serait entièrement immergé). Le volume du tétraèdre immergé est donc $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(2\sqrt{2}\sqrt{3}\right)^2$, c'est-à-dire $V = 4$

6. La place qui reste

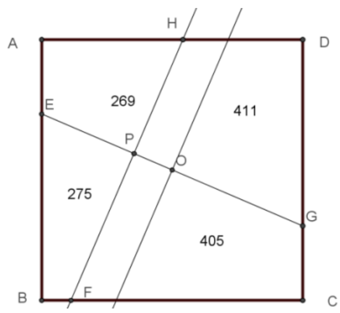
On peut traiter ce problème par des calculs : les équations des cercles sont successivement :
$x^2 + y^2 = 100$, $(x-5)^2 + (y-10)^2 = 25$ et $(x-10)^2 + (y-5)^2 = 25$

Les coordonnées de T sont 5 et 5, c'est le centre du carré. On trouve les coordonnées de R : 8 et 6 et, par symétrie



celles de S : 6 et 8. Les distances TR et TS sont égales à $\sqrt{10}$, la distance SR est $2\sqrt{2}$. La hauteur issue de T dans le triangle TSR a aussi pour longueur $2\sqrt{2}$ et l'aire du triangle est 4.

7. Encore un carreau cassé



Comme 269 + 411 = 275 + 405, les quadrilatères AEDG et BCGE ont la même aire. Il s'ensuit que la droite (EG) passe par le centre du carré, ce que ne suggère pas la figure. La nouvelle est plus conforme. Les deux droites perpendiculaires en

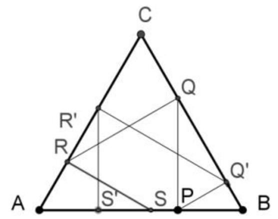
O découpent le carré en quatre quadrilatères de même aire, les deux quadrilatères dont les aires sont les plus petites étant « complétés » par des trapèzes. Si on appelle φ l'angle d'inclinaison de (EH) sur l'horizontale, le côté c du carré s'écrit : $c = 34\cos\varphi$. Appelons d la distance OP. Notons $a = 289\cos^2\varphi$, le quart de l'aire du carré. Notons t et u les aires des trapèzes. On a $t + u = 34d$ et $u - t = 2d\sin\varphi$. La relation de proportionnalité s'écrit :

$\frac{a-t}{269} = \frac{a-u}{275} = \frac{a+u}{405} = \frac{a+t}{411}$. Ces égalités donnent les relations $\begin{cases} 142a = 680t \\ 13a = 68u \\ 136a = 269u + 405t \end{cases}$

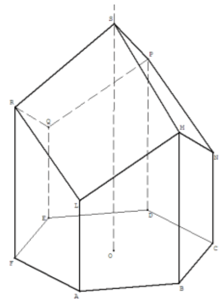
Thème : Angles et distances

1. Tourniquette

Prenons comme unité le côté du triangle ABC. On a successivement :
$BQ = 2PB$, $CQ = 1 - 2PB$, $CR = 2(1 - 2PB)$ et $AS = 2(1 - 2(1 - 2PB))$, ou encore $AS = 8PB - 2$.
De même : $PQ' = \frac{1}{2}PB$, $CQ' = 1 - \frac{1}{2}PB$, $CR' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}PB\right)$ et $AS' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}PB\right)\right)$, ou encore $AS' = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}PB$. Finalement $PB = \frac{2}{7}$.



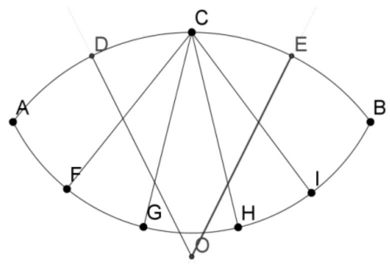
2. Alvéoles d'abeilles



On pourra consulter avec profit la littérature fournie existant sur le sujet, notamment un article écrit « niveau lycée » dans *Wikipedia*

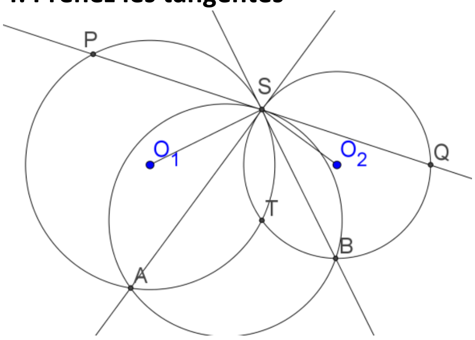
3. Mon œil

Appelons x la mesure commune – en degrés – des angles inscrits dans le cercle de centre O interceptant les arcs AD, DC, CE et EB. Appelons y la mesure commune – en degrés – des angles inscrits dans le cercle de centre C interceptant les arcs AF, FG, GH HI et IB.
$\widehat{ADE} = 180 - 3x$ et $\widehat{AGH} = 180 - 3y$. Il s'ensuit que $y - x = 4$.



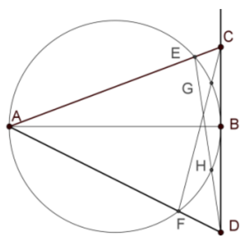
Comme C est le centre d'un cercle passant par A et B, donc $\widehat{ACB} = 10y$ (cette fois, il s'agit d'un angle au centre).
Dans le cercle de centre O, $\widehat{ACB} = 180 - 4x$ (angle inscrit). Il s'ensuit que $5y + 2x = 90$.
Finalement $y = 14$ et $x = 10$.
$\widehat{DAH} = \widehat{DAB} + \widehat{BAH} = 3x + 3y = 72$

4. Prenez les tangentes



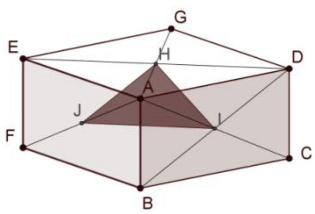
La figure suggère quelques égalités d'angles : $\widehat{QSB} = \widehat{SAP}$, $\widehat{SBQ} = \widehat{PSA}$
On applique pour cela l'égalité de l'angle inscrit avec l'angle formé par une tangente et une corde (et il y a des angles opposés par le sommet).
Les triangles ASP et SQB ont les mêmes angles. Ils sont semblables.
En prenant cette fois la tangente au cercle circonscrit à ABS, on obtient l'égalité $\widehat{PSA} = \widehat{SBA}$. L'égalité $\widehat{ASB} = \widehat{APS}$ peut s'obtenir par différence. Finalement, les trois triangles SAP, BAS et BSQ sont semblables, d'où les égalités de rapports :
$\frac{PS}{BS} = \frac{AS}{AB} = \frac{SQ}{BS}$, d'où vient l'égalité demandée

5. … et mon tout est isocèle



On prouve l'égalité des angles $\widehat{AGH}$ et $\widehat{AHG}$:
$\widehat{AGH} = \widehat{AGB} - \widehat{BGH} = 90° - \widehat{BAH} = \widehat{AHG}$
Comme $\widehat{AGB}$est droit

6. La boîte



Le triangle HIJ a pour côtés les segments des milieux des triangles ACG, AFC et AGF. Il est donc une réduction du triangle FCG d'un coefficient ½, et son aire est le quart de celle du triangle FCG.
Le triangle FCG est une face du tétraèdre trirectangle A'FCG (on appelle A' le sommet diamétralement opposé à A dans la boîte). Les faces de ce tétraèdre qui ont un angle droit Ont pour aires respectives 96, 8h et 6h. D'après le théorème de De Gua de

Malvès (le rédacteur vient lui-même d'apprendre qu'il s'appelle comme cela), dans un tétraèdre trirectangle, la somme des carrés des aires des faces qui ont un angle droit est égale au carré de l'aire de la face qui n'en a pas (cela peut se démontrer avec la formule de Héron et un peu de calcul littéral). On a donc : $96^2 + 64h^2 + 36h^2 = 120^2$. Finalement $h = 7{,}2$.

Thème : Suites et fonctions

1. Mise en jambes sur les suites arithmétiques et géométriques

a. Soit n le nombre de termes de chacune de ces deux suites. La différence entre les deux sommes est la somme des entiers impairs compris entre 1 et $2n-1$. Cette somme est $(n-1)^2$. Or, 836 –715 = 121. Donc $n = 12$.

b. Appelons q la raison commune à ces suites. $a_{15} = q^{14}a_1$ et $b_{11} = q^{10}b_1$. Donc $q^4 = \frac{99}{27}$ et donc $q = \sqrt[4]{\frac{11}{3}}$

2. La loi des séries

Appelons α et β les raisons de ces suites. Les termes généraux s'écrivent $a_k = a_1 + (k-1)\alpha$ et $b_k = b_1 + (k-1)\beta$. L'hypothèse est : $a_1^2 - 4b_1 < 0$ et $a_n^2 - 4b_n < 0$. Cette dernière inégalité s'écrit aussi : $a_1^2 + (n-1)^2\alpha^2 + 2a_1(n-1)\alpha - 4(b_1 + (n-1)\beta) < 0$

On peut écrire le terme d'ordre k de chacune des suite : $a_k = \frac{(m-k)a_1+(k-1)a_m}{m-1}$ et $b_k = \frac{(m-k)b_1+(k-1)b_m}{m-1}$.

Supposons que $a_k^2 - 4b_k \geq 0$. Il s'ensuit que

$$\left((m-k)a_1 + (k-1)a_m\right)^2 \geq 4(m-1)\left((m-k)b_k + (k-1)b_m\right)$$

On majore le terme de gauche (en remplaçant un double produit par la somme des carrés) :

$$(m-k)^2a_1^2 + (k-1)^2a_m^2 + (m-k)(k-1)(a_1^2 + a_m^2) \geq 4\left((m-1)(m-k)b_1 + (m-1)(k-1)b_m\right)$$

On travaille un peu le membre de gauche :

$$(m-k)(m-1)a_1^2 + (k-1)(m-1)a_m^2 \geq 4\left((m-1)(m-k)b_1 + (m-1)(k-1)b_m\right)$$

Qui est en contradiction avec les hypothèses.

3. Troisième degré

a. On (re)trouve les relations de Viète : $a+b+c = -s$, $ab+bc+ca = m$ et $abc = -p$

b. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + 1110x - 1\,000$. Cette fonction est précisément définie par $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Comparons cette fonction avec la fonction g définie par $g(x) = (x-1)(x-10)(x-100)$. Comme $a < 1$, on en déduit que $g(a) < 0$. La fonction h définie par $h(x) = g(x) - f(x) = (d-111)x^2$ est de signe constant, négatif. Et donc $g(b) - f(b) < 0$ et de même $g(c) - f(c) < 0$. Il s'ensuit que b et c sont ou bien plus petits que 1 ou bien compris entre 10 et 100. Comme leur produit est supérieur à 1 000, Ils sont tous deux compris entre 10 et 100.

4. Encore le troisième degré

Une fonction polynôme du troisième degré prend au plus trois fois la même valeur. Les fonctions g et h définies par $g(x) = f(x) - 12$ et $h(x) = f(x) + 12$ prennent la valeur 0 chacune en trois des nombres $-3, -2, -1, 1, 2$ et 3. Comme les coefficients du terme du second degré dans l'une et l'autre sont égaux, on en déduit que la somme des racines (voir exercice 3) est la même pour les deux. On doit donc partager $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ en deux parties de même somme, ce qui donne $\{-3, 1, 2\}$ et $\{3, -1, -2\}$. Le produit des racines est -6 pour l'un, 6 pour l'autre. Si on appelle a le coefficient du terme du troisième degré de f et c le coefficient constant, on a $6 = -\frac{c+12}{a}$ et $-6 = -\frac{c-12}{a}$ ou la distribution symétrique. Ce qui donne dans tous les cas $c = 0$.

5. Suites combinées

Faisons l'hypothèse de récurrence suivante : pour tout entier n, il existe un nombre θ_n, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $x_n = 2\sin\theta_n$ et $y_n = 2\cos\theta_n$. L'idée vient des valeurs de départ… L'hypothèse est réalisée au rang 1. Supposons qu'elle le soit en un certain rang n sur lequel nous ne faisons aucune hypothèse. Au rang suivant, on a : $x_{n+1}^2 + 2\cos\theta_n = 2$, soit $x_{n+1}^2 = 2(1-\cos\theta_n) = 4\sin^2\frac{\theta_n}{2}$. Comme les termes des deux suites sont positifs, il s'ensuit que $x_{n+1} = 2\sin\frac{\theta_n}{2}$. De la première égalité définissant les suites, on tire $y_{n+1} = 2\cos\frac{\theta_n}{2}$. La propriété est héréditaire et donc vraie pour tous les entiers.

Cette démonstration par récurrence achève presque l'exercice, la suite des θ_n tend vers 0, la suite des x_n vers 0 et celle des y_n vers 1.

6. Sommes de sinus

$\sin 1 > 0$, donc on peut écrire $a_n = \frac{1}{\sin 1}\sum_{p=1}^{p=n} \sin 1 \sin p$.
Pour tout p, $\sin 1 \sin p = \frac{1}{2}(\cos(p-1) - \cos(p+1))$, et donc
$a_n = \frac{1}{2\sin 1}(\cos 0 - \cos 2 + \cos 1 - \cos 3 + \cos 2 - \cdots + \cos(n-1) - \cos(n+1))$, dont il ne reste, après télescopage, que $a_n = \frac{1}{2\sin 1}(\cos 0 + \cos 1 - \cos n - \cos(n+1))$
Comme $\cos 0 + \cos 1 = 2\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$ et $\cos n + \cos(n+1) = 2\cos\frac{1}{2}\cos\frac{2n+1}{2}$,

$$a_n = \frac{1}{\sin 1}\cos\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\right)$$

Les rangs n tels que $a_n < 0$ sont donc ceux pour lesquels $\cos\frac{1}{2} < \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Une tabulation donne les premières valeurs de n : 6, 12, 18, 25, 31, 37, 43, 50, 56, 62

Thème : Équations

1. Deux inconnues pour un minimum
$x^2+y^2-6x+4y=(x-3)^2+(y+2)^2-13$.
Le minimum de la fonction f définie par $f(x,y)=x^2y+y^2-6x+4y$ est donc $\boxed{\text{-13}}$

2. Racines entremêlées Posons $x=\sqrt{a}$ et $y=\sqrt{b}$.

$$\begin{cases} a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=134 \\ a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=126 \end{cases}.$$
$$\iff \begin{cases} x^3+y^3=134 \\ x^2+y^2x=126 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=134 & (1) \\ (x+y)xy=126 & (2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x+y)(x-y)^2=8 \\ (x+y)^3=512=2^9 \end{cases} \text{(on remplace (1) par (1)-(2) et (2) par (1)+3}\times\text{(2))}$$
$$\iff \begin{cases} x+y=8 \\ (x-y)^2=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$$
$$\iff (x=\frac{9}{2} \text{ et } y=\frac{7}{2}) \text{ ou } (x=\frac{7}{2} \text{ et } y=\frac{9}{2})$$

On obtient finalement, $\boxed{a=\frac{81}{4} \text{ et } b=\frac{49}{4}}$ ou $\boxed{a=\frac{49}{4} \text{ et } b=\frac{81}{4}}$

3. Avec la partie entière
$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=9 \iff \sqrt{x+1}=9-\sqrt{x} \iff (x+1=(9-\sqrt{x})^2 \text{ et } \sqrt{x}\leq 9)$
$\iff (x+1=81-18\sqrt{x}+x \text{ et } \sqrt{x}\leq 9) \iff \sqrt{x}=\frac{40}{9} \iff x=\frac{1600}{81}$

De même, $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=10 \iff x=\frac{9801}{400}$

$\sqrt{4x+2}=9 \iff x=\frac{79}{4}$

$\sqrt{4x+2}=10 \iff x=\frac{49}{2}$

D'autre part, $\frac{79}{4}<\frac{1600}{81}<\frac{49}{2}<\frac{9801}{400}$

- 1er cas : $x<\frac{1600}{81}$
  $\sqrt{4x+2}<10$ et $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<9$ donc $\lfloor\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\rfloor+\lfloor\sqrt{4x+2}\rfloor\leq 17<18$.
  x n'est pas solution de l'équation.
- 2ème cas : $\frac{1600}{81}\leq x<\frac{49}{2}$
  $9<\sqrt{4x+2}<10$ et $9\leq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<10$ donc $\lfloor\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\rfloor+\lfloor\sqrt{4x+2}\rfloor=18$.
  x est solution de l'équation.
- 3ème cas : $\frac{49}{2}\leq x$
  $\sqrt{4x+2}\geq 10$ et $9\leq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<10$ donc $\lfloor\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\rfloor+\lfloor\sqrt{4x+2}\rfloor\geq 19>18$.
  x n'est pas solution de l'équation.

Finalement : $\boxed{\lfloor\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\rfloor+\lfloor\sqrt{4x+2}\rfloor=18 \iff \frac{1600}{81}\leq x<\frac{49}{2}}$

4. Somme de puissances de solutions d'une équation
L'équation $x^2-6x+1=0$ a pour racines $3+2\sqrt{2}$ et $3-2\sqrt{2}$.
Posons $a=3+2\sqrt{2}$ et $b=3-2\sqrt{2}$ (ou le contraire)
$a^0+b^0=1+1=2$

$a^1+b^1=a+b=6$
$a^2-6a+1=0$, donc $a^2=6a-1$, en multipliant par a^{n-2}, pour un entier $n\geq 2$, on obtient $a^n=6a^{n-1}+a^{n-2}$.
De même, $b^n=6b^{n-1}+b^{n-2}$
En faisant la somme, on obtient $(a^n+b^n=6(a^{n-1}+b^{n-1})-(a^{n-2}+b^{n-2})$.
Notons $u_n=a^n+b^n$.
On a alors $u_0=2$, $u_1=6$ et pour tout $n\geq 2$, $u_n=6\,u_{n-1}-u_{n-2}$. On en déduit que la suite (u_n) est à valeurs entières c'est à dire que pour tout entier n, a^n+b^n est un entier.

On note ensuite, v_n le reste de la division euclidienne de u_n par 5.
On a alors $v_0=2$, $v_1=1$, $v_2=4$, $v_3=3$, $v_4=4$, $v_5=1$, $v_6=2$ ...
On calcule de proche en proche :
$u_{n+2}=6\,u_{n+1}-u_n$
$u_{n+3}=6\,u_{n+2}-u_{n+1}=35\,u_{n+1}-6\,u_n$
$u_{n+4}=6\,u_{n+3}-u_{n+2}=204\,u_{n+1}-35\,u_n$
$u_{n+5}=6\,u_{n+4}-u_{n+3}=1189\,u_{n+1}-204\,u_n$
$u_{n+6}=6\,u_{n+5}-u_{n+4}=6930\,u_{n+1}-1189\,u_n=6930\,u_{n+1}-1190\,u_n+u_n$
De la dernière ligne, on déduit que pour tout entier n, $v_{n+6}=v_n$, or v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, sont tous non nuls, donc, pour tout entier n, v_n est non nul et donc u_n n'est pas un multiple de 5.
(évidemment, si on utilisait les congruences ça serait plus facile ...)
Finalement,
$\boxed{\text{pour tout entier } n, \text{ la somme } a^n+b^n \text{ est un nombre entier qui n'est pas un multiple de 5}}$.

5. Circulez !

a, b et c sont des nombres positifs tels que $a(1-b)=b(1-c)=c(1-a)=\dfrac{1}{4}$.
On a nécessairement, $0<a<1$, $0<b<1$ et $0<c<1$.
On va faire un raisonnement par l'absurde.
Supposons $a<b$.
De $a(1-b)=b(1-c)$, on déduit $1-b>1-c$ et donc $b<c$.
De $b(1-c)=c(1-a)$, on déduit alors $1-c>1-a$ et donc $c<a$
On obtient alors $a<b<c<a$ ce qui est impossible.
On a montré $\underline{a\geq b}$
De la même façon, en supposant $a>b$, on obtient $a>b>c>a$ ce qui montre $\underline{a\leq b}$.
On a donc $\underline{a=b}$.
De $a(1-b)=c(1-a)$, on déduit alors $\underline{a=c}$ et finalement, $\boxed{a=b=c}$

6. $a+\sqrt{b+\sqrt{c}}$

On commence par calculer :
$$\frac{3}{x-3}+\frac{19}{x-19}+2=2\frac{x^2-11x}{(x-3)(x-19)} \text{ et } \frac{5}{x-5}+\frac{17}{x-17}+2=2\frac{x^2-11x}{(x-5)(x-17)}$$
On en déduit :
$$\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-5}+\frac{17}{x-17}+\frac{19}{x-19}=x^2-11\,x-4$$
$$\iff \frac{3}{x-3}+\frac{19}{x-19}+2+\frac{5}{x-5}+\frac{17}{x-17}+2=x^2-11\,x$$
$$\iff 2\frac{x^2-11x}{(x-3)(x-19)}+2\frac{x^2-11x}{(x-5)(x-17)}=x^2-11\,x$$
$$\iff \frac{2}{(x-3)(x-19)}+\frac{2}{(x-5)(x-17)}=1 \text{ ou } x^2-11\,x=0$$
0 et 11 sont donc deux solutions de l'équation, pour chercher les autres solutions, posons $x=y+11$.
$$\frac{2}{(x-3)(x-19)}+\frac{2}{(x-5)(x-17)}=1$$
$$\iff \frac{2}{(y+8)(y-8)}+\frac{2}{(y+6)(y-6)}=1$$
$$\iff \frac{2}{y^2-64}+\frac{2}{y^2-36}=1$$
$\iff y^4-104\,y^2+2504=0.$
L'équation $z^2-104\,z+2504=0$ a pour solutions :

$52+\sqrt{200}$ et $52-\sqrt{200}$,
donc, l'équation $y^4-104\,y^2+2504=0$ a pour solutions :
$\sqrt{52+\sqrt{200}}$, $-\sqrt{52+\sqrt{200}}$, $\sqrt{52-\sqrt{200}}$ et $-\sqrt{52-\sqrt{200}}$,
donc l'équation $\dfrac{2}{(x-3)(x-19)}+\dfrac{2}{(x-5)(x-17)}=1$ a pour solutions :
$11+\sqrt{52+\sqrt{200}}$, $11-\sqrt{52+\sqrt{200}}$, $11+\sqrt{52-\sqrt{200}}$ et $11-\sqrt{52-\sqrt{200}}$
et finalement, l'équation $\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{5}{x-5}+\dfrac{17}{x-17}+\dfrac{19}{x-19}=x^2-11\,x-4$ a pour solutions :
0, 11, $11+\sqrt{52+\sqrt{200}}$, $11-\sqrt{52+\sqrt{200}}$, $11+\sqrt{52-\sqrt{200}}$ et $11-\sqrt{52-\sqrt{200}}$
la plus grande solution positive de cette équation est : $11+\sqrt{52+\sqrt{200}}$
On trouve donc $\boxed{a=11,\ b=52 \text{ et } c=200}$

7. Les inconnues sont les coefficients

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} f(a)=a^3 \\ f(b)=b^3 \end{cases}\\
\Longleftrightarrow &\begin{cases} a^3+a^3+ba+c=a^3 \\ b^3+ab^2+b^2+c=b^3 \end{cases}\\
\Longleftrightarrow &\begin{cases} a^3+ba+c=0 & (1) \\ ab^2+b^2+c=0 & (2) \end{cases}\\
\Longleftrightarrow &\begin{cases} a(a^2-b^2)+b(a-b)=0 & (1)-(2) \\ ab^2+b^2+c=0 & (2) \end{cases}\\
\Longleftrightarrow &\begin{cases} (a-b)(a^2+(a+1)\,b)=0 \\ c=-(a+1)\,b^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

- 1er cas : $a=-1$

  Le système s'écrit alors $\begin{cases} (-1-b)(1+0b)=0 \\ c=0 \end{cases}$

  On trouve dans ce cas un unique triplet (a,b,c) solution : $(-1,-1,0)$.

- 2ème cas : $a=b$

  Le système s'écrit alors $\begin{cases} 0=0 \\ c=-(a+1)\,a^2 \end{cases}$

  On trouve dans ce cas une infinité de triplets (a,b,c) solutions. Ils s'écrivent $(a,a,-(a+1)\,a^2)$ avec $a\in\mathbb{R}$.

  (On retrouve la solution précédente)

- 3ème cas : $a\neq b$ et $a\neq -1$

  Le système s'écrit alors $\begin{cases} a^2+(a+1)\,b=0 \\ c=-(a+1)\,b^2 \end{cases}$

  On trouve dans ce cas une infinité de triplets (a,b,c) solutions. Ils s'écrivent $a,-\dfrac{a^2}{a+1},-\dfrac{a^4}{a+1} avec a\in$ $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Finalement, l'ensemble des triplets (a,b,c) est

$$\boxed{\left\{\left(a,a,-(a+1)\,a^2\right)/\quad a\in\mathbb{R}\right\}\bigcup\left\{\left(a,-\tfrac{a^2}{a+1},-\tfrac{a^4}{a+1}\right)/\quad a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}}$$

Pépinière premières - Graphes.

(Pierre Bornsztein décembre 2015)

Exercice 1. Dans une soirée, chacun des $n \geq 2$ invités a serré la main d'un certain nombre d'autres invités. Prouver que deux des invités ont serré le même nombre de mains.

Solution. Considérons le graphe (simple et non orienté) dont les sommets sont les invités et dont les arêtes représentent les poignées de mains.
Chaque sommet est donc de degré d avec $0 \leq d \leq n-1$ (on ne peut avoir $d = n$ puisque personne ne serre sa propre main). Les n degrés respectifs des n sommets sont donc n entiers compris entre 0 et $n-1$. La seule façon d'avoir n nombres différents serait que chacun des entiers de 0 à $n-1$ soit le degré d'un sommet. Or, il est impossible d'avoir simultanément un sommet de degré 0 (relié à aucun autre sommet) et un sommet de degré $n-1$ (relié à chacun des autres sommets).
Ainsi, deux des sommets ont le même degré.

Exercice 2. Prouver que lors de la soirée précédente, le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Solution. On conserve le graphe ci-dessus. La somme S de tous les degrés compte exactement chaque arête deux fois. Ainsi, le nombre S est un entier pair. Or, on a $S = S_I + S_P$, où S_I (resp. S_P désigne la somme des degrés impairs (resp. pairs). Clairement, S_P est un nombre pair, d'où S_I est un nombre pair. Puisque S_I est une somme de nombres impairs, c'est que cette somme comporte un nombre pair de termes.

Exercice 3. Soit $n \geq 3$ le nombre de personnes présentes lors de la soirée. On suppose qu'au total, il y a eu au moins n poignées de mains échangées. Prouver qu'on peut trouver des personnes $p_1, \cdots, p_k$, avec $k \geq 3$, telles que p_1 a serré la main de p_2, p_2 a serré la main de p_3, ..., et p_k a serré la main de p_1.

Solution. On conserve le graphe ci-dessus. On va raisonner par récurrence sur n.

Pour $n = 3$, il y a donc trois sommets, disons A, B, C, et trois arêtes. Ainsi, chaque paire de sommets correspond à une arête et A, B, C fournit le cycle cherché.

Soit $n \geq 3$ un entier fixé, et supposons le résultat établi pour tout graphe simple et non orienté de n sommets et n arêtes.
On considère maintenant un graphe (simple et non orienté) de $n+1$ sommets et $n+1$ arêtes.
S'il existe un sommet de degré 0, on l'élimine ainsi qu'une arête arbitraire. Le graphe résultant possède alors n sommetes et n arêtes, et l'hypothèse de récurrence assure alors de l'existence d'un cycle dans ce graphe. Ce cycle est évidemment un cycle dans le graphe initial.
S'il existe un sommet de degré 1, on l'élimine ainsi que l'arête dont il est une extrémité. Le graphe résultant possède alors n sommetes et n arêtes, et on conclut comme ci-dessus.
Si chaque sommet est de degré au moins 2 (en fait, puisque la somme des degrés est le double du nombre d'arêtes, il est facile de vérifier que chaque sommet est alors de degré 2), on choisit un sommet arbitraire, disons A_0. En utilisant une arête d'extrémité A_0, on atteint un sommet A_1. On élimine momentanément l'arête utilisée. Puisque A_1 est de degré au moins 2, on peut utiliser une autre arête d'extrémité A_1, qui nous emmène au sommet A_2. On élimine l'arête entre A_1 et A_2. Comme ci-dessus, il reste au moins une arête d'extrémité A_2, que l'on utilise pour atteindre un sommet A_3, et ainsi de suite... Tant qu'on tombe sur un nouveau sommet, il est toujours possible d'en atteindre un autre. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de sommets, il arrivera forcément un moment où l'on va retomber sur un sommet déjà rencontré, ce qui fournit le cycle désiré.

Exercice 4. On considère un graphe simple non orienté à n sommets, deux quelconques toujours reliés par une arête. Chaque arête est coloré d'une couleur parmi n possibles, et chaque couleur est utilisée au moins une fois.
Prouver qu'il existe trois sommets reliés deux à deux par trois arêtes de trois couleurs différentes.

Solution. On ne conserve qu'une arête de chaque couleur. Cela nous fournit un graphe à n sommets et n arêtes et, d'après l'exercice précédent, il existe un cycle dans ce nouveau graphe. Cela assure de l'existence d'un cycle dont les arêtes sont toutes de couleurs différentes dans le graphe initial. Appelons un tel cycle un *arc-en-ciel*.

Puisque notre graphe initial contient au moins un arc-en-ciel, on peut en considérer un de longueur minimale, disons $A_1A_2\cdots A_kA_1$, avec $k \geq 3$. L'objectif est de prouver que $k = 3$.
Par l'absurde : supposons que $k > 3$.
On considère l'arête A_1A_3, qui est une corde dans notre arc-en-ciel, et appelons c sa couleur. Puisque chaque couleur n'est utilisée qu'au plus une fois dans notre arc-en-ciel, l'un des deux chemins $A_1A_2A_3$ et $A_3\cdots A_kA_1$ ne contient pas d'arête de couleur c, ainsi l'un des cycles $A_1A_2A_3A_1$ ou $A_1A_3\cdots A_kA_1$ est un arc-en-ciel, mais de longueur strictement plus petite que celle de notre arc-en-ciel minimal. Cela fournit la contradiction désirée.

Exercice 5. Dans un pays, se trouvent n villes reliées deux à deux par des routes, jamais plus d'une seule route entre deux villes. Ces routes ne se croisent pas, certaines passant si nécessaire au-dessus d'autres à l'aide de ponts. Chaque route est à sens unique.
Hélàs, des responsables du Ministère du Sens de la Circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on sort d'une ville quelconque, il sera impossible d'y revenir.
Un tel réseau de routes entre les n villes est dit *catastrophique*.
a) Prouver que, dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.
b) Prouver que, dans tout réseau catastrophique, il y a une ville depuis laquelle on peut atteindre directement chacune des autres villes.
c) Combien, au minimum, faut-il changer de sens de circulation pour qu'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (éventuellement en plusieurs étapes) dans le nouveau réseau routier obtenu?

Solution. a) Considérons le graphe simple et orienté dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les routes en respectant les orientations de celles-ci.
a) Parmi toutes les villes, on en considère une, disons A, de laquelle part le minimum de routes. On note m ce minimum.
Nous allons prouver qu'on ne peut sortir de A (soit donc que $m = 0$).

Par l'absurde : supposons qu'il existe une route qui parte de A, disons vers la ville B. Il y a n villes en tout, dont m peuvent être atteintes directement depuis A. Compte-tenu de A, il y a donc $n-1-m$ villes qui sont reliées à A par une route qui arrive en A, et aucune d'elles n'est donc B. Clairement, on a $m < n-1$ sinon on aurait $m = n-1$, en contradiction avec la minimalité de m. Afin d'éviter l'existence d'un cycle, chacune des $n-1-m$ villes ci-dessus est alors reliée à B par une route qui arrive en B. Par conséquent, en n'oubliant pas que la route entre A et B va de A vers B, le nombre de routes qui partent de B ne peut dépasser $n-1-(n-1-m)-1 = m-1$. On en déduit qu'il part moins de routes de B qu'il n'en part de A, en contradiction avec la minimalité de m.

b) Le raisonnement est le même qu'au a), mais en considérant la ville dont part le maximum de routes.

c) Il faut bien entendu changer au moins un sens de circulation...
Appelons A la ville dont on ne peut pas sortir, et B celle depuis laquelle on peut atteindre directement chacune des autres villes. La route qui relie A et B est donc orientée de B vers A. On décide de l'orienter de A vers B.
Soit X une ville, autre que A et B. Alors, $ABXA$ est un cycle et, parmi ces trois villes, on peut passer de n'importe laquelle à n'importe quelle autre.
Soit X et Y deux villes, autres que A et B. Alors, on peut passer de X à Y (et réciproquement) en allant d'abord en A puis en B.
Ainsi, en ne changeant qu'un seul sens de circulation, mais bien choisi, on peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre.

Exercice 6. Dans un pays, se trouvent au moins 101 villes, et des liaisons aériennes directes (aller-retour) existent entre certaines d'entre elles. La capitale est ainsi reliée à 100 villes, et chaque autre ville que la capitale possède exactement 10 liaisons aériennes. Il est possible de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre en utilisant les liaisons aériennes, éventuellement en plusieurs étapes.
Prouver qu'il est possible de fermer la moitié des liaisons aériennes de la capitale tout en préservant la capacité de voyager d'une ville à l'autre.

Solution. Soit G le graphe simple et non orienté dont les sommets sont les villes et dont les arêtes représentent les liaisons aériennes.
Soit G' le graphe obtenu en éliminant la capitale C et toutes les arêtes dont elle est une extrémité. Par hypothèse G est connexe, mais G' ne l'est pas forcément. Quoi qu'il en soit, chaque composante connexe de G' contient au moins un sommet adjacent à C dans G. Dans G', chacun de ces sommets est de degré 9, et tous les autres sont de degrés 10. Mais, chaque composante connexe, vue comme un graphe à elle seule, doit posséder un nombre pair de

sommets de degrés impairs. Cela assure qu'au moins deux sommets sont de degrés impairs dans chaque composante, soit donc de l'existence dans chaque composante d'au moins deux sommets reliés à C dans G. Comme C est de degré 100 dans G, il n'y a donc pas plus de 50 composantes connexes dans G'. On peut alors rétablir la connexité en restorant C et une seule arête pour chaque composante. Cela revient à conserver la connexité initiale en éliminant au moins 50 arêtes.

Exercice 7. Dans chaque case d'un tableau 10×10, on a écrit un et un seul chiffre. Chacun des chiffres $0, 1, \cdots, 9$ est écrit 10 fois.
Prouver qu'il existe une ligne ou une colonne qui contient plus de trois chiffres différents.

Solution. On construit un graphe bipartite dont les deux ensembles de sommets indépendants sont X et Y, où X est un ensemble de 10 sommets représentant les 10 nombres, et Y est un ensemble de 20 sommets représentant les 10 lignes et les 10 colonnes. Une arête joint le sommet $x \in X$ au sommet $y \in Y$ si et seulement si le nombre x est écrit dans la ligne ou colonne y.
Il s'agit alors de prouver qu'un sommet $y \in Y$ est de degré au moins 4. Pour cela, il suffit de prouver qu'il existe au moins 61 arêtes, le principe des tiroirs permettant alors de conclure.
La clé est de remarquer que chaque $x \in X$ est de degré au moins 7. En effet, pour $x \in X$, notons respectivement $l(x)$ et $c(x)$ le nombre de lignes et le nombre de colonnes quisont reliées à x. Alors, le tableau formé par l'intersection des $l(x)$ lignes et $c(x)$ colonnes concernées est un tableau de taille $c(x)l(x)$, qui doit contenir les 10 apparitions de x.
Ainsi, on a $l(x)c(x) \geq 10$, avec $l(x), c(x) \geq 1$ et entiers. Il est facile de vérifier qu'alors $l(x) + c(x) \geq 7$, ce qui signifie bien que x est de degré au moins 7.