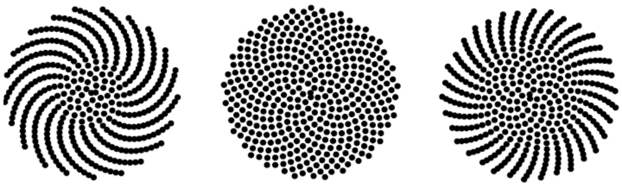


Modèles possibles pour la disposition des fleurons de l'inflorescence d'une composée

Stage préolympique ouvert aux lycéens de première désignés par leurs établissements, les 19 et 20 décembre 2016

« Quelle irritation, quelle frustration quand on est occupé à chercher la solution, le regard dans le vide et l'air stupide, l'esprit occupé par toutes ces pensées contradictoires qui courent à 100 à l'heure ou au contraire tournent en rond. Il s'en passe de belles, alors, dans le cerveau ! « Ça me dit quelque chose… » « Ah c'est bien sûr… » « J'y ai déjà réfléchi pendant une heure » « Vraiment je ne vois pas » « Et si… » « Non ce n'est pas possible ! » « Je suis sûr qu'il y a une faute dans l'énoncé ! » « Enfin, c'est inconcevable, comment se… » « Ah c'est incroyable comme je suis crétin ! » « Mais ce type a l'esprit tordu ! » « Pourquoi bon sang est-ce que je perds mon temps sur cette histoire ? » « Je suis SÛR qu'il y a une faute dans l'énoncé ! »
Pourquoi on perd ainsi son temps ? Parce que l'on se sent si fier quand on a résolu l'énigme sans jeter un coup d'œil à la solution ; mais aussi parce que l'on se sent si bien, malgré la frustration, quand on est en train de chercher ! »

Cédric VILLANI, Préface du livre « *Énigmes mathématiques corrigées* » G. et C. Deslandes, Éditions Ellipses 2014

La Pépinière académique de mathématique organise depuis dix ans, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Saclay-Île-de-France, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge, le collège Jean-Philippe Rameau de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Thierry ICHELMANN, Anne MENANT, Évelyne ROUDNEFF, Christine WEILL, Joffrey ZOLNET

Les intervenants professeurs : Pierre BORNSZTEIN (Lycée Alfred Kastler, CERGY), Dominique CLÉNET (Lycée François Villon, LES MUREAUX), Hélène COCHARD (Lycée Blaise Pascal, ORSAY), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Michelle JACCOTTET (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE)

Professeurs accompagnants : Jeanne ALLEMAND (Lycée Madeleine Daniélou, RUEIL MALMAISON), Jérôme CERISIER (Lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE), Cécile GOISNARD (Lycée Richelieu, RUEIL MALMAISON), Claire ROUSSENALY (Lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE), Fahd SOUSSI (Lycée Eugène Ionesco, ISSY LES MOULINEAUX)

Emploi du temps

Lundi 19 décembre 2016

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Graphes PB + HC	Équations KR + TI	Angles et distances NF + CW
11 h 50	Film Alan TURING (30 minutes) Film d'animation : Dimensions chapitres 5 et 6 (30 minutes)		
13 heures	Repas		
13 h 50	Angles et distances NF + CW	Graphes PB + HC	Équations KR + TI
15 h 20	Équations KR + TI	Angles et distances NF + CW	Graphes PB + HC

Mardi 20 décembre 2016

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Nombres et dénombrement CD + HC	Aires et volumes DC + XG	Suites et fonctions SM + MJ
11 h 50	Exposé : Mathématiques du tournesol et de la pomme de pin		
13 heures	Repas		
13 h 50	Suites et fonctions SM + MJ	Nombres et dénombrement CD + HC	Aires et volumes DC + XG
15 h 20	Aires et volumes DC + XG	Suites et fonctions SM + MJ	Nombres et dénombrement CD + HC

Thème : Suites et fonctions

1. Et en plus, elle est périodique ?

La fonction f, fonction bornée de **R** vers **R**, vérifie la condition suivante :

Pour tout réel x, $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{5}{6}\right)$

Montrer que f est périodique.

2. Degré 5

La fonction f est une fonction polynôme de degré 5, qui vérifie les égalités :

$$f(1)=0, f(3)=1, f(9)=2, f(27)=3, f(81)=4, f(343)=5$$

Dans l'écriture canonique de f, quel est le coefficient du terme de degré 1 ?

3. Conservation du produit

Une fonction f, définie sur **N**, vérifie : pour tous entiers m et n, $f(mn)=f(m)f(n)$. Cette fonction est de plus strictement croissante. On pose $a=f(2)$ et on suppose $a>2$. Quelle est la plus petite valeur entière possible de a ?

4. Télescopage

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<\frac{5}{3}$

5. Drôle de fonction

La fonction f est définie sur [0, 1], elle est croissante et satisfait aux deux propriétés :

1. Pour tout $x\in[0,1]$, $f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{f(x)}{2}$
2. Pour tout $x\in[0,1]$, $f(1-x)=1-f(x)$

Déterminer les images par f de $\frac{1}{13}$ et de $\frac{441}{2017}$

6. Une équation fonctionnelle

Trouver les fonctions f de **Z** dans **Z** pour lesquelles, pour tout entier relatif x, $f\big(x-f(y)\big)=f\big(f(x)\big)-f(y)-1$

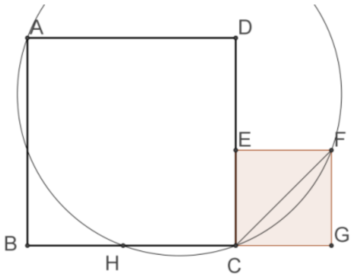
Thème : Angles et distances

1. Pythagore est partout

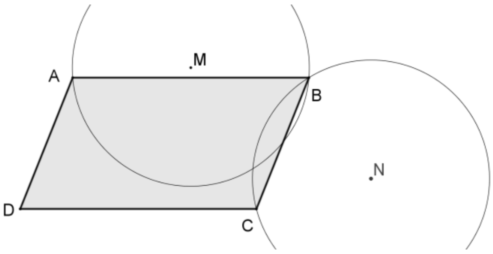
Le point D, intérieur au triangle équilatéral ABC, est tel que $\widehat{\mathrm{ADC}} = 150°$. Prouver que $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{DC}^2$.

2. 1234567

On considère un carré ABCD de côté 1234. Sur le côté [CD], on place le point E tel que CE = 567. Le carré CEFG est construit, à l'extérieur du carré ABCD. Le cercle circonscrit au triangle ACF recoupe [BC]en H. Quelle est la distance CH ?

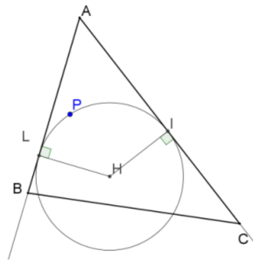


3. Un rayon connu



On considère un parallélogramme ABCD et deux cercles de même rayon R, l'un passant par les points A et B, l'autre par les points B et C. Ces deux cercles ont en commun les points B et E. On suppose que le point E n'est pas un sommet du parallélogramme. Montrer que le rayon du cercle circonscrit au triangle ADE est aussi R.

4. Les vertus du cercle exinscrit



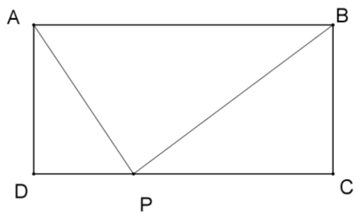
1. On considère un triangle ABC et un point P intérieur à ce triangle. Comment construire un cercle passant par P et tangent aux demi-droites [AB) et [AC) ?
2. Une droite passant par P rencontre les demi-droites [AB) et [AC) en Q et R. Quel est le minimum du périmètre du triangle AQR ?

5. Équidistances

Quatre points du plan, A, B, C et D sont tels que les distances AB, AC, AD, BC, BD et CD ne prennent que deux valeurs a et b (dire pourquoi elles ne peuvent être toutes égales). Quels sont les rapports $\frac{a}{b}$ possibles ?

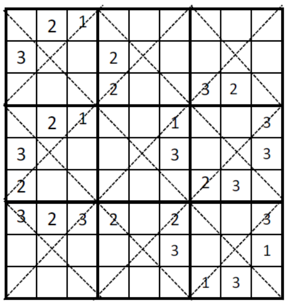
6. Grand angle

La rectangle ABCD est tel que AB = 2 et BC = 1. On choisit au hasard un point P sur le segment [CD]. Quelle est la probabilité que l'angle $\widehat{\mathrm{APB}}$ soit le plus grand des angles du triangle APB



Thème : Nombres et dénombrement

1. Un, deux, trois



Le plateau genre « Sudoku » ci-contre doit être complété : les cases vides seront remplies avec les symboles 1, 2 ou 3, de sorte que sur toute diagonale comportant un nombre de cases multiple de 3 on trouve autant de cases marquées 1, marquées 2 ou marquées 3.

2. On n'arrête pas le progrès (*Olympiades internationales des métropoles – Moscou septembre 2016*)

Chaque année, le *Groupe des économistes optimistes* publie un rapport fondé sur n indicateurs. Pour chaque indice i, le i-ème indicateur prend une valeur entière comprise entre 1 et un certain entier a_i. Les a_i sont tels que $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{2}$.

Le rapport annuel conclut dans le sens du progrès chaque fois que $n-1$ indicateurs au moins ont une valeur supérieure à celle qu'ils avaient l'année précédente. Montrer qu'il est possible de « progresser » indéfiniment.

3. Liberté de la presse

Neuf journalistes assistent à une conférence. Chacun d'eux parle au maximum trois langues, et toute paire prise parmi les neuf possède une langue commune. Montrer qu'il existe une langue commune à au moins cinq d'entre eux.

4. Un très grand nombre

Soit $N = 2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \cdots + 2^{5^{2016}} + 2^{5^{2017}}$ Quels sont les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de N?

5. Loto

Des jetons marqués des nombres entiers de 1 à N sont répartis dans deux sacs. On tire un jeton d'un sac et on le met dans l'autre. La moyenne des numéros des jetons du premier sac et la moyenne des numéros des jetons du second sac augmentent l'une et l'autre de x. Quelle est la plus grande valeur possible de x ?

6. Un sept, ça se trouve, mais deux…

Deux entiers positifs x et y sont tels que $x+y$ est un multiple de 7. Montrer que x^7+y^7est un multiple de 49.

7. Combien de milieux ?

On considère l'ensemble S des points dont les trois coordonnées, entières, vérifient

$$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 4$$

À chaque paire de points pris parmi ceux-ci on associe son milieu. Quelle est la probabilité que, deux points étant choisis au hasard dans S, leur milieu soit un élément de S ?

On commencera par rappeler le nombre de façons de choisir une paire dans un ensemble à n éléments.

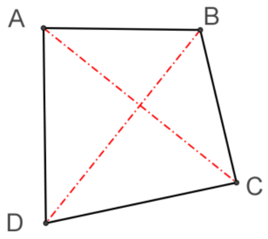
8. Image subliminale

Les trois couleurs primaires, rouge, vert et bleu sont utilisées pour colorer chaque pixel d'un écran (assez grand…). Monter qu'il existe un rectangle dont les quatre pixels-sommets sont de la même couleur.

Thème : Aires et volumes

1. Diagonales isométriques

Le quadrilatère convexe ABCD est tel que ses diagonales [AC] et [BD] ont pour longueur 1. Son périmètre est $\frac{5}{2}$. Quelle est, au maximum, l'aire de ce quadrilatère ?



2. Une apparition de la moyenne quadratique

On considère un trapèze de bases a et b et de hauteur h. Quelle est la longueur du segment parallèle aux bases qui détermine deux trapèzes de même aire ? À quelle distance de la plus grande des bases se situe-t-il ?

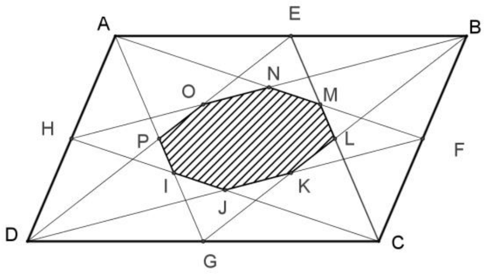
3. Toupie ou soucoupe volante ?

Un triangle isocèle de périmètre 20 tourne autour de sa base, engendrant un double cône. Quel est le volume maximum de ce double cône ?

4. Élagage d'un parallélogramme

On donne un parallélogramme ABCD et les milieux respectifs E, F, G et H de ses côtés [AB], [BC], etc. Les points d'intersection des médianes de ce parallélogramme : [AG] avec [HC], [HC] avec [DF], [DF] avec [GB], etc. sont les sommets d'un octogone I J K L M N O P.

Quelle fraction de l'aire du parallélogramme l'aire de l'octogone représente-t-elle ?



5. Pré pas carré

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A et B de l'axe des abscisses dont les abscisses sont respectivement – 1 et 1. Un point P de l'axe des ordonnées a pour ordonnée le nombre t, tel que $0 \leq t \leq 1$. Les points situés sur le cercle de centre P passant par A (et B), décrivent une partie du plan. Quelle est l'aire de cette partie ?

Thème : Équations

1. Optimisation

Si les deux entiers a et b sont tels que $a + b$ est une racine de l'équation $x^2 + ax + b = 0$, quel est le minimum de ab ?

2. Un phénix

Un entier N est tel que le nombre M obtenu en supprimant les trois derniers chiffres de N (en écriture décimale) a pour cube N. Trouver N.

3. Triplets pythagoriciens $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}+\mathbf{1}, \boldsymbol{n}+\boldsymbol{p})$

Déterminer les entiers naturels n (inférieur à 1 000) et p (supérieur ou égal à 2) pour lesquels le triangle de côtés $n, n+1$ et $n+p$ est rectangle.

4. Trois inconnues

Peut-on trouver des réels a, b et c tels qu'il existe une fonction f vérifiant, pour tous réels x et y :
$f\big(x + f(y)\big) = ax + by + c$?

5. Pour ceux qui aiment le calcul littéral (et pour ceux qui le négligent)

On donne un nombre réel a. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

6. Résilience

Trouver les nombres irrationnels x pour lesquels $x^3 - 6x$ et $x^4 - 8x^2$ sont des nombres rationnels

Pépinière premières - Graphes.

(Pierre Bornsztein décembre 2016)

Exercice 1. Dans une soirée, chacun des invités a serré la main d'un certain nombre d'autres invités. Prouver que deux des invités ont serré le même nombre de mains.

Exercice 2. Prouver que lors de la soirée précédente, le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Exercice 3. Soit $n \geq 3$ le nombre de personnes présentes lors de la soirée. On suppose qu'au total, il y a eu au moins n poignées de mains échangées. Prouver qu'on peut trouver des personnes $p_1, \cdots, p_k$, avec $k \geq 3$, telles que p_1 a serré la main de p_2, p_2 a serré la main de p_3, ..., et p_k a serré la main de p_1.

Exercice 4. On considère un graphe simple non orienté à n sommets, deux quelconques toujours reliés par une arête. Chaque arête est coloré d'une couleur parmi n possibles, et chaque couleur est utilisée au moins une fois. Prouver qu'il existe trois sommets reliés deux à deux par trois arêtes de trois couleurs différentes.

Exercice 5. Dans un pays, se trouvent n villes reliées deux à deux par des routes, jamais plus d'une seule route entre deux villes. Ces routes ne se croisent pas, certaines passant si nécessaire au-dessus d'autres à l'aide de ponts. Chaque route est à sens unique.
Hélàs, des responsables du Ministère du Sens de la Circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on sort d'une ville quelconque, il sera impossible d'y revenir.
Un tel réseau de routes entre les n villes est dit *catastrophique*.
a) Prouver que, dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.
b) Prouver que, dans tout réseau catastrophique, il y a une ville depuis laquelle on peut atteindre directement chacune des autres villes.
c) Combien, au minimum, faut-il changer de sens de circulation pour qu'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (éventuellement en plusieurs étapes) dans le nouveau réseau routier obtenu?

Exercice 6. Dans un pays, se trouvent au moins 101 villes, et des liaisons aériennes directes (aller-retour) existent entre certaines d'entre elles. La capitale est ainsi reliée à 100 villes, et chaque autre ville que la capitale possède exactement 10 liaisons aériennes. Il est possible de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre en utilisant les liaisons aériennes, éventuellement en plusieurs étapes.
Prouver qu'il est possible de fermer la moitié des liaisons aériennes de la capitale tout en préservant la capacité de voyager d'une ville à l'autre.

Exercice 7. Dans chaque case d'un tableau 10×10, on a écrit un et un seul chiffre. Chacun des chiffres $0, 1, \cdots, 9$ est écrit 10 fois.
Prouver qu'il existe une ligne ou une colonne qui contient plus de trois chiffres différents.