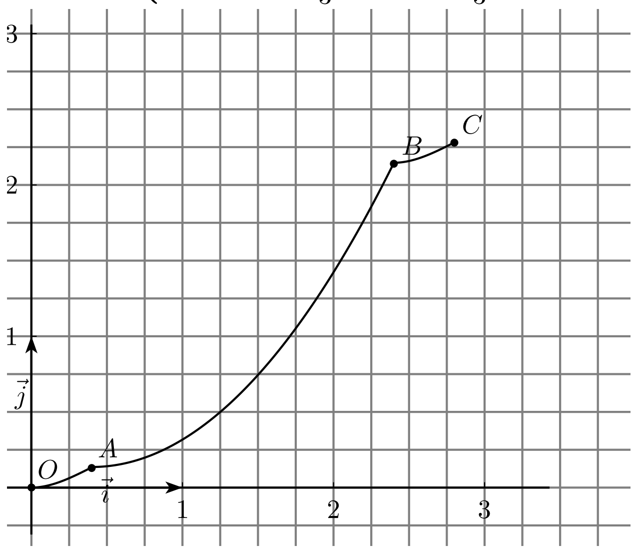
Fonctions et équations

Exercice 1

Soit f la fonction qui, à la hauteur x du liquide associe son volume dans la cuve.

f est définie sur l'intervalle $[0;2,8]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi}{3}x^2(1,2-x) \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 0,4 \\ f(x) = 0,64\dfrac{\pi}{3} + 0,16\pi(x-0,4)^2 \text{ pour } 0,4 < x \leqslant 2,4 \\ f(x) = 0,64\dfrac{\pi}{3} + 0,64\pi + \dfrac{\pi}{3}(x-2,4)^2(3,6-x) \text{ pour } 2,4 < x \leqslant 2,8 \end{cases}$



Exercice 2

En marchant à la vitesse de 5 km/h l'homme met 24 min pour rejoindre sa maison située à 2 km du premier point de rencontre. En 24 min, à la vitesse de 15 km/h, le chien parcourt 6 km.

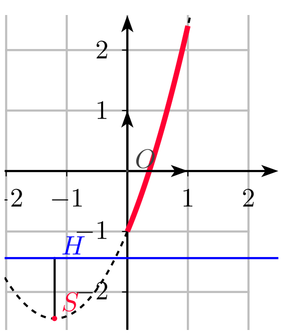
Exercice 3

Soit f la restriction dà l'intervalle $[0,1]$ de la fonction $x \mapsto x^2 - 2bx - 1$.

La parabole d'équation $y = x^2 - 2bx - 1$ a pour sommet le point S de coordonnées $(b, -b^2-1)$.

Quatre cas sont à envisager.

On notera respectivement m et M les minimum et maximum de f sur l'intervalle $[0,1]$ et δ l'écart entre m et M : $\delta = M - m$.

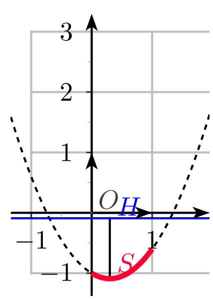


Premier cas : $b \leqslant 0$.

$m = f(0) = -1, M = f(1) = -2b, \delta = -2b+1$.

Pour b inférieur à 0 :

$-2b+1 = 1$ si et seulement si $b = 0$.

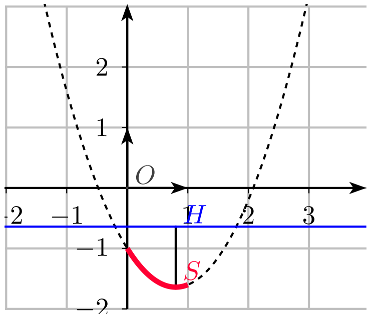


Deuxième cas : $0 \leqslant b \leqslant 0,5$.

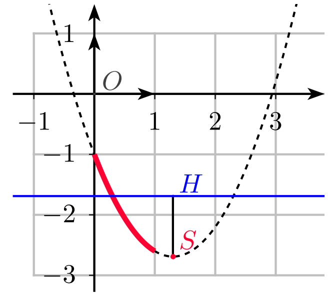
$m = f(b) = -b^2-1, M = f(1) = -2b, \delta = (b-1)^2$.

Pour b compris entre 0 et 0,5 :

$(b-1)^2 = 1$ si et seulement si $b = 0$.



Troisième cas : $0,5 \leqslant b \leqslant 1$.
$m = f(b) = -b^2 - 1, M = f(0) = -1, \delta = b^2$.
Pour b compris entre 0,5 et 1 :
$b^2 = 1$ si et seulement si $b = 1$.



Quatrième cas : $1 \leqslant b$.
$m = f(1) = -2b, M = f(0) = -1, \delta = 2b - 1$.
Pour b supérieur à 1 : $2b - 1 = 1$
si et seulement si $b = 1$.

Démonstration du cas n°3 : $0,5 \leqslant b \leqslant 1$.
b appartient à l'intervalle de définition de f qui est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0, b]$ et croissante sur l'intervalle $[b, 1]$.
Le minimum de f est donc $f(b) = -b^2 - 1$. Le maximum est le plus grand des deux réels $f(0) = -1$ et $f(1) = -2b$. Puisque $0,5 \leqslant b$, on a $-1 \geqslant -2b$. Donc $f(0) \geqslant f(1)$: Le maximum est $f(0)$.

On procède de la même façon pour les trois autres cas.
En résumé
Il y a deux valeurs de b et deux seulement pour lesquelles l'écart entre les minimum et maximum de la fonction$f$ soit égalà 1 : $b = 0$ et $b = 1$.

Exercice 4
On cherche à déterminer les fonctions f définies sur $\mathbf{N}$ telles que, pour tout entier naturel n,
$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$.
Soit n un entier naturel donné. On appelle P_n la propriété : $f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3$

1. Lemme **(L)**
   Si une telle fonction existe, deux naturels distincts ont des images distinctes par f.
   Cela revient à démontrer, par contraposition, que : Si $f(n) = f(m)$ alors $m = n$.
   Démonstration
   Si $f(m) = f(n)$, alors : $f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = f(m) + f(f(m)) + f(f(f(m)))$.
   Donc $3n = 3m$ d'où $m = n$. On en déduit que si $m \neq n$, alors $f(m) \neq f(n)$.
2. Supposons qu'il existe une fonction f vérifiant pour tout n la propriété P_n.
   (a) Calcul de $f(0)$
   $f(0) + f(f(0)) + f(f(f(0))) = 0$. Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de cette somme est nul. D'où : $f(0) = 0$.
   (b) Calcul de $f(1)$
   D'après **(L)**, $f(1) \neq 0)$. Donc $f(1) \geqslant 1$. Comme $f(1) \neq 0), f(f(1)) \neq 0)$ et $f(f(f(1))) \neq 0$. D'où : $f(1) + f(f(1)) + f(f(f(1))) \geqslant 3$. On en déduit que $f(1) = 1$.
   (Sinon, $f(1) + f(f(1)) + f(f(f(1))) > 3$, contraire à l'hypothèse).
   (c) Calcul de $f(n)$
   Soit m un entier naturel donné. Supposons que nous ayons établi que,pour tous les entiers k compris entre 0 et m, $f(k) = k$. Calculons $f(m+1)$. D'après **(L)**, l'image de $m+1$ par f ne peut être égale ni à 0, ni à 1,$\cdots$, ni à m. Donc $f(m+1) \geqslant m+1$. On en déduit que l'image par f de $f(m+1)$ ne peut être égale ni à 0, ni à 1,$\cdots$, ni à m. Il en est de même pour l'image de $f(f(m+1))$.
   Donc $f(f(m+1)) \geqslant m+1$ et $f(f(f(m+1))) \geqslant m+1$.
   Par conséquent : $f(m+1) + f(f(m+1)) + f(f(f(m+1))) \geqslant 3(m+1)$. D'où $f(m+1) = m+1$ (sinon $f(m+1) + f(f(m+1)) + f(f(f(m+1))) > 3(m+1)$ qui est contraire à l'hypothèse (pour tout entier naturel n, $f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$).

   En conclusion Si, pour tout entier naturel n, f vérifie la propriété P_n, alors $f(n) = n$.
3. On vérifie réciproquement que la fonction définie sur $\mathbf{N}$ par :$f(n) = n$ a la propriété P_n pour tout n .

Il existe donc une fonction unique définie sur $\mathbf{N}$ et vérifiant pour tout n la propriété P_n.
Il s'agit de la fonction $n \mapsto n$.

Exercice 5

On suppose qu'il existe une fonction définie sur $\mathbf{R}$ telle que : $\begin{cases} f(4) = 10 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \text{ pour tous réels } x \text{ et } y \end{cases}$

1. Avec $x = y = 0$, on a : $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.
2. Posons $a = f(1)$. Avec $x = y = 1$, on a : $f(2) = 2a + 1$ puis, en remplaçant x et y par 2 : $f(4) = 2f(2) + 4$ d'où $f(4) = 4a + 6$. Sachant que $f(4) = 10$, on en déduit que $a = 1$ d'où $f(1) = 1, f(2) = 3$.
3. Soit n un entier naturel. En remplaçant x par n et y par 1, on a : $f(n+1) = f(n) + 1 + n$ d'où $f(n+1) - f(n) = n + 1$.
4. Calcul de $f(2010)$.
   Considérons la somme $S = (f(2010) - f(2009)) + (f(2009) - f(2008)) + (f(2008) - f(2007)) + \cdots + + (f(2) - f(1)) + (f(1) - f(0))$.
   D'une part, cette somme est égale à $f(2010) - f(0)$ et d'autre part à $2010 + 2009 + \cdots + 2 + 1$.
   D'où $f(2010) = \dfrac{2010 \times 2011}{2}$=2 210 055.

En conclusion : Si une telle fonction f existe, alors f(2 010)=2 210 055.

Exercice 6

On cherche à déterminer les entiers naturels non nuls m et n tels que : $\dfrac{1}{m} + \dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{12}$ et n impair.
Comme $\dfrac{1}{m}$ et $\dfrac{4}{n}$ sont deux termes strictement positifs dont la somme est $\dfrac{1}{12}$, chacun est strictement compris entre 0 et $\dfrac{1}{12}$. D'où $m > 12$ et $n > 48$.
Si $\dfrac{1}{m} + \dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{12}$ alors $n((m-12) = 48m$ **(E)**.
48 est divisible par 16 ($=2^4$) et n est impair. Donc $(m-12)$ est divisible par 16 : Il existe un entier k tel que $m - 12 = 16k$.
(E) devient : $nk = 12(3+4k)$ **(E')**.
12 est divisible pa 4 et, comme n est impair, on en déduit que k est divisible par 4 : Il existe un entier k' tel que $k = 4k'$.
(E') devient :$nk' = 3(3+16k')$ soit $nk' = 9 + 48k'$.
k' n'est pas nul (sinon $k = 0$ donc $m = 12$ et on a établi précedemment que $m > 12$).. En divisant les deux membres de $nk' = 9 + 48k'$ par k', on obtient $n = \dfrac{9}{k'} + 48$.
Comme n et 48 sont des entiers, $\dfrac{9}{k'}$ est un entier. De plus, $m = 12 + 48k'$ et $m > 48$ donc k' est un entier strictement positif qui divise 9 : $k' \in \{1, 3, 9\}$.
Si $k' = 1, n = 49$ et $m = 588$; si $k' = 3, n = 51$ et $m = 204$; Si $k' = 9, n = 57$ et $m = 76$. On vérifie, réciproquement, que les trois couples (n, m) ci-dessus sont tels que $\dfrac{1}{m} + \dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{12}$.
Il y a donc trois couples (n, m) d'entiers naturels solutions de **(E)**.

Exercice 7

Supposons $a < b < c < d < e$. Les dix sommes partielles $a+b, a+c, a+d, a+e, b+c, b+d, b+e, c+d, c+e, d+e$ ont pour somme $S = 4(a+b+c+d+e)$.
Or $S = 21+26+35+40+49+51+54+60+65+79 = 480$. Donc $a+b+c+d+e = 120$. La plus grande des sommes partielles des nombres pris deux à deux est $d+e$, la plus petite est $a+b$. On en déduit que : $d+e = 79, a+b = 26$ d'où $c = (a+b+c+d+e) - (a+b) - (d+e) = 20$. La deuxième des dix sommes partielles classées par ordre croissant est $a+c$. Donc $a+c = 26$ d'où $a = 6$. Comme $a+b = 21$,alors $b = 15$ et $b+c = 35$. La plus petite des sommes partielles restantes est 40. C'est d'autre part, un des nombres $a+d, a+e, b+d, b+e, c+d, c+e$. Le plus petit nombre de cet ensemble est $a+d$. Donc $a+d = 40$ d'où $d = 34$. On en déduit $b+d = 49, c+d = 54$. La plus petite des sommes partielles restantes est 51 d'une part,et $a+e$ d'autre part . D'où $a+e = 51$ et $e = 45, b+e = 60, c+e = 65$.
Finalement $a = 6, b = 15, c = 20, d = 34, e = 45$.

Exercice 8

1. Pour cet exercice, on admet les propriétés suivantes :
   (a) Pour tous réels m, l'équation (d'inconnue x), $x^3 = m$ a une solution réelle unique. Elle est notée $\sqrt[3]{m}$.
   Pour tous réels x et m, $\left[x^3 = m\right]$ équivaut à $[x = \sqrt[3]{m}]$.
   Exemples : $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-27} = -3$.
   (b) Pour tous réels A et B, $\sqrt[3]{AB} = \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}$.
   On a une propriété analogue pour les quotients.
2. Pour tous réels A et B : $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.
   $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$
3. Soit $N = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$. Posons $A = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$ et $B = \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$.
   $N = A + B$ donc $N^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$ soit $N = A^3 + B^3 + 3ABN$.
   Or $A^3 = 5 + 2\sqrt{13}$ et $B^3 = 5 - 2\sqrt{13}$ donc $A^3 + B^3 = 10$.
   $AB = \sqrt[3]{(5-2\sqrt{13})(5+2\sqrt{13})} = \sqrt[3]{(5^2 - \left(2\sqrt{13}\right)^2)}$.
   Donc $AB = \sqrt[3]{-27}$ soit $AB = -3$. On en déduit que $N^3 = 10 - 9N$.
   N est donc solution de l'équation $x^3 + 9x - 10 = 0$.
4. Résolution de l'équation $x^3 + 9x - 10 = 0$.
   1 est un solution de cette équation, mais y en a-t-il d'autres ?
   Une représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^3 + 9x - 10$ permet de conjecturer l'unicité de cette solution. Démontrons le algébriquement en "forçant" la factorisation par $(x-1)$ de $x^3 + 9x - 10$.
   Pour tout réel $x, x^3 + 9x - 10 = x^3 - 1 + 1 + 9x - 10$ donc $x^3 + 9x - 10 = (x^3 - 1) + 9(x-1))$.
   Or $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ donc, pour tout $x, x^3 + 9x - 10 = (x-1)(x^2 + x + 10)$.
   Par conséquent : $\left(x^3 + 9x - 10 = 0\right)$ équivaut à $(x - 1 = 0$ ou $x^2 + x + 10 = 0)$.
   $x^2 + x + 10 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 10$ soit $x^2 + 9x + 10 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{39}{4}$.
   Comme, pour tout x, $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$, $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{39}{4} \geqslant \dfrac{39}{4}$.
   L'équation $x^2 + x + 10 = 0$ n'a donc pas de solution réelle.
   En conclusion
   1 est l'unique solution de l'équation $x^3 + 9x - 10 = 0$. Donc $N = 1$.

Exercice 9

Soit $\dfrac{p}{q}$ la fraction irréductible la plus proche de $\dfrac{3}{7}$, distincte de $\dfrac{3}{7}$, et dont le dénominateur est inférieur à 100.

On a : $p \in \mathbf{N^*}, q \in \mathbf{N^*}$, $\dfrac{p}{q} - \dfrac{3}{7} = \dfrac{7p - 3q}{pq}$ et $\dfrac{7p-3q}{pq} \neq 0$.

1. Premier cas : $\dfrac{p}{q} - \dfrac{3}{7} > 0$.
   Comme $pq > 0$, on en déduit que $7p - 3q$ est un entier strictement positif.
   Comme $\dfrac{7p-3q}{pq}$ doit être le plus petit possible, on en déduit que $7p - 3q = 1$.
   Cette équation admet une solution particulière : $p = 1, q = 2$.
   Les trois équations suivantes sont équivalentes : $7p - 3q = 1$; $7p - 3q = 7 \times 1 - 3 \times 2$; $7(p-1) = 3(q-2)$.
   3 est un diviseur de $3(q-2)$ donc un diviseur de $7(p-1)$. Comme 3 et 7 n'ont pas de diviseur commun (autre que 1), 3 divise $(p-1)$. Il existe donc un entier k tel que $p - 1 = 3k$.Alors $q - 2 = 7k$.
   On vérifie réciproquement que les couple (p, q) où$p = 1 + 3k$ et $q = 2 + 7k$ avec k entier, sont solutions de l'équation$7p - 3q = 1$.
   La valeur de q la plus grande possible, inférieure ou égale à 100, est obtenue pour $k = 14$.
   Si $k = 14, q = 100$ et$p = 43$.
   $\dfrac{43}{100} - \dfrac{3}{7} = \dfrac{1}{700}$. $\dfrac{43}{100}$ est une valeur approchée de $\dfrac{3}{7}$ à $\dfrac{1}{700}$ près par excès.
2. Deuxième cas : $\dfrac{p}{q} - \dfrac{3}{7} < 0$.
   On cherche alors les entiers naturels p et q tels que $3q - 7p = 1$.
   Une solution particulière de cette équation s'obtient pour $q = 5$ et $p = 2$.
   On démontre de même que les solutions entières de cette équation sont les couples d'entiers naturels (p, q)

pour lesquels il existe un entier k tel que $p = 3k+2$ et $q = 7k+5$. La valeur de q la plus grande possible, inférieure ou égale à 100, est obtenue pour $k = 13$. Si $k = 13$ alors $q = 96$ et$p = 41$.
$\frac{3}{7} - \frac{41}{96} = \frac{1}{672}$. $\frac{41}{96}$ est une valeur approchée de $\frac{3}{7}$ à $\frac{1}{672}$ près par défaut.

Comme $\frac{1}{672} > \frac{1}{700}$, la fraction la plus proche de $\frac{3}{7}$, distincte de $\frac{3}{7}$, est $\frac{43}{100}$.