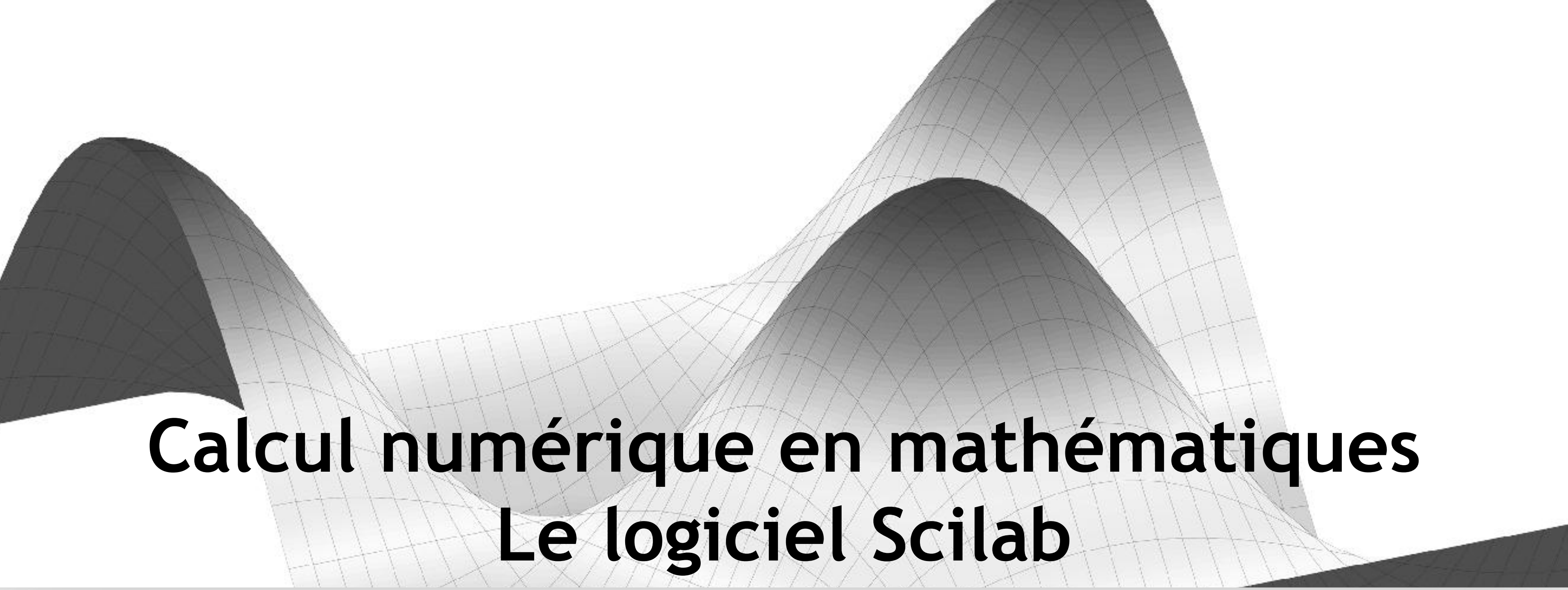


Calcul numérique en mathématiques
Le logiciel Scilab

11 avril 2011

Claude Gomez

Directeur général de SCILAB ENTERPRISES

Scilab

Plan

Comment calculer ?

Le calcul numérique

Le logiciel de calcul numérique Scilab

Comment calculer ?

En mathématiques on cherche des solutions

On a : $f(x) = 0$

Que vaut x ?

Exemple 1

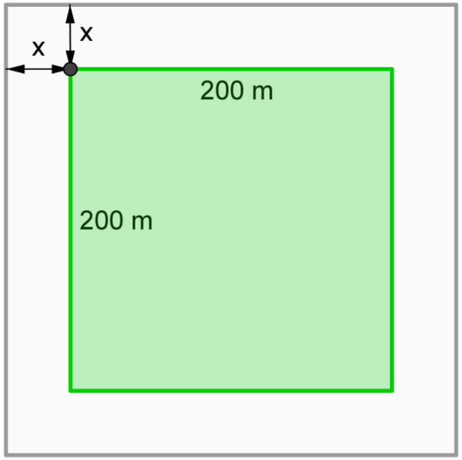
Trois cousins ont respectivement 32 ans, 20 ans et 6 ans. Dans combien d’années l’âge de l’ainé sera-t-il égal à la somme des âges des deux autres ?

$$32 + x = 20 + x + 6 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$$

On a trouvé une solution exacte.

Exemple 2

On encadre un champ carré de 200 mètres de côté par une bande de largeur x. On obtient un nouveau champ carré d'aire double du premier, dont les côtés sont parallèles au premier. Calculer la largeur de la bande.



L'aire de l'ancien champ est 40 000 m2.

Le côté du nouveau champ est $200+2x$ mètres.

Donc $(200+2x)^2 = 2\times 40000$

En divisant par 4, cette équation équivaut à $(100+x)^2 = 2\times 10000$

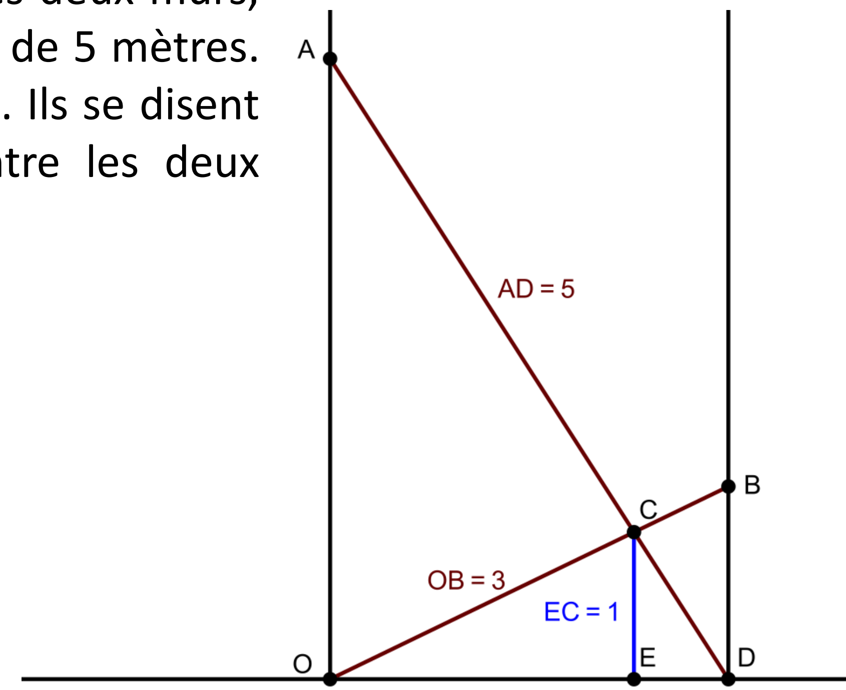
Comme $100+x>0$, la seule solution est $100+x=100\sqrt{2}$

c'est-à-dire $x=100(\sqrt{2}-1)$ soit 41,421 mètres.

On a trouvé une solution exacte facile à calculer.

Exemple 3

Pierre et Paul ont des maisons côte à côte. Entre les deux murs, ils mettent deux échelles, l'une de 3 mètres, l'autre de 5 mètres. Ils remarquent qu'elles se croisent à 1 mètre du sol. Ils se disent qu'ils doivent pouvoir en déduire la distance entre les deux maisons.



Ecrire les équations est facile :

- Pythagore dans le triangle OBD : $x_B{}^2 + y_B{}^2 = 9$
- Pythagore dans le triangle OAD : $x_B{}^2 + y_A{}^2 = 25$
- Equation de la droite (OB) : $y = \dfrac{y_B}{x_B} x$
- Equation de la droite (AD) : $y = \dfrac{-y_A}{x_B} x + y_A$
- Les deux droites se coupent en un point d'ordonnée 1 :

$$1 = \frac{y_B}{x_B} x_C = \frac{-y_A}{x_B} x_C + y_A \Rightarrow x_C = \frac{x_B}{y_B} \Rightarrow 1 = \frac{-y_A}{x_B} \frac{x_B}{y_B} + y_A$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} x_B{}^2 + y_B{}^2 = 9 \\ x_B{}^2 + y_A{}^2 = 25 \\ y_A\, y_B = y_A + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B{}^2 = 9 - y_B{}^2 \\ y_A{}^2 - y_B{}^2 = 16 \\ y_A\, y_B = y_A + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B{}^2 = 9 - y_B{}^2 \\ y_A{}^2 - y_B{}^2 = 16 \\ y_A = \dfrac{y_B}{y_B - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B{}^2 = 9 - y_B{}^2 \\ y_B{}^4 - 2y_B{}^3 + 16y_B{}^2 - 32y_B + 16 = 0 \end{cases}$$

Comment résoudre l'équation $y_B{}^4 - 2y_B{}^3 + 16y_B{}^2 - 32y_B + 16 = 0$?

La solution est :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\Big(3\,\big(\sqrt{2}\,(\sqrt{283}+3\sqrt{3})\big)^{1/3}\,\big(-29\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{1/3} \\
&\quad +2\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{2/3}+128\big)^{1/4}+\sqrt{3}\,\big(\\
&\quad -29\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{1/3}+2\,(620 \\
&\quad +12\sqrt{3}\sqrt{283})^{2/3}+128\big)^{3/4} \\
&\quad +\sqrt{2}\sqrt{3}\,\Big(-29\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{1} \\
&\quad {}^{/3}\,\big(-29\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{1/3}+2\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{2} \\
&\quad +128\big)^{1/2} \\
&\quad -\big(-29\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{1/3}+2\,(620 \\
&\quad +12\sqrt{3}\sqrt{283})^{2/3}+128\big)^{1/2}\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{2/3} \\
&\quad -64\,\big(-29\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{1/3}+2\,(620 \\
&\quad +12\sqrt{3}\sqrt{283})^{2/3}+128\big)^{1/2}+51\sqrt{3}\,(620 \\
&\quad +12\sqrt{3}\sqrt{283})^{1/3}\,\big(\sqrt{2}\,(\sqrt{283}+3\sqrt{3})\big)^{1/3}\Big)^{1/2}\Big)\Big/ \\
&\Big(\big(\sqrt{2}\,(\sqrt{283}+3\sqrt{3})\big)^{1/3}\,\big(-29\,(620 \\
&\quad +12\sqrt{3}\sqrt{283})^{1/3}+2\,(620+12\sqrt{3}\sqrt{283})^{2/3}+128\big) \\
&{}^{1/4}\Big)
\end{aligned}
$$

Le « calcul » donne : $y_B = 1,31157122 \Rightarrow x_B = 2,69810692$

On a trouvé une solution exacte difficile à calculer.

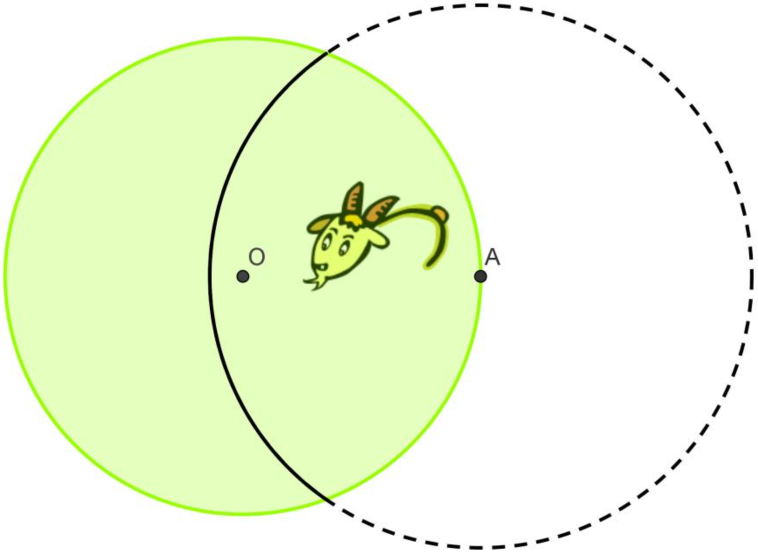
Exemple 4

Monsieur Seguin possède un champ circulaire de rayon égal à 100 mètres. Il possède une chèvre qu'il attache à un pieu planté à la circonférence du champ. Quelle doit être la longueur maximale de la corde reliant la chèvre au pieu de façon que la chèvre ne puisse pas brouter plus de la moitié de la surface du champ ?

Le calcul amène à résoudre une équation du type :

$$\sin(\theta) - \theta\cos(\theta) = \frac{\pi}{2}$$

Comment faire ???????



On ne trouve pas de solution exacte.

Pour les curieux : si le champ fait 100 mètres, la corde doit faire 115,873 mètres

Conclusion

- Exemple 1. On a trouvé une solution exacte.
- Exemple 2. On a trouvé une solution exacte facile à calculer :
  on a utilisé des valeurs « approchées ».
- Exemple 3. On a trouvé une solution exacte difficile à calculer :
  on a utilisé des valeurs « approchées ».
- Exemple 4. On n'a pas trouvé de solution exacte :
  on a utilisé un algorithme « approché » et des valeurs « approchées ».

Mais alors, tous mes calculs sont faux ?

Qu'est-ce qu'une valeur « approchée » ?

Le calcul numérique

Faire des calculs rapides

↓

Utiliser des « mots machine » de 64 bits

↓

Comment représenter les nombres dans ces « mots machine » ?

- On a une infinité de nombres
- Mais on a un nombre fini de représentations : 2^{64}

Que faire ?

Représenter des nombres entiers

On utilise la représentation binaire :

si $n = b_0 2^0 + b_1 2^1 + b_2 2^2 + b_3 2^3 + \cdots + b_p 2^p$ avec $b_i = 0$ ou 1

sa représentation binaire est : $b_p \cdots b_3\, b_2\, b_1\, b_0$

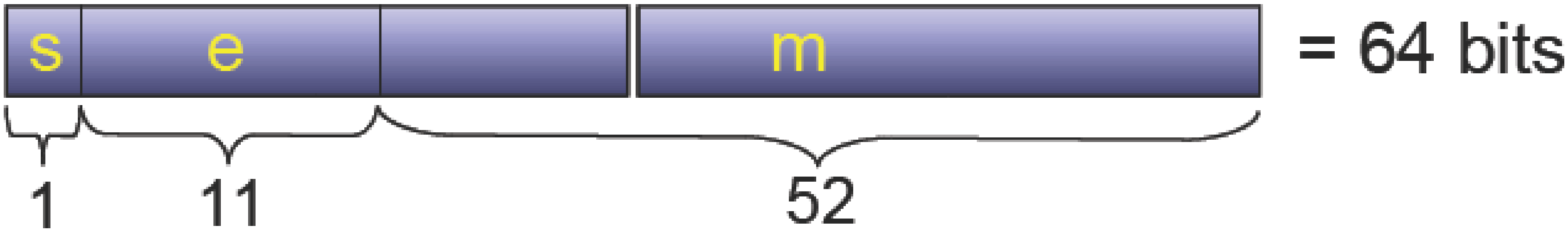
Par exemple : $13=8+4+1=2^3+2^2+2^0$ soit 1101

....	0	0	0	0	0	1	1	0	1

Problème : on ne peut représenter que les entiers de 0 à 2^{64}

La norme IEEE-754

Double précision = 2 X 32 bits



s = signe e = exposant m = mantisse

Nombre = $(-1)^{s} \times 1.m \times 2^{e-1023}$

Valeur absolue min = $2,225\ldots 10^{-308}$

Valeur absolue max = $1,797\ldots 10^{308}$

Erreur relative = $2,220446049 \times 10^{-16}$

soit 16 chiffres maximum de précision

La précision

```
-->format(18);  <= on affiche 18 caractères
-->1+1.E-10
 ans  =
   1.0000000001
-->1+1.E-15
 ans  =
   1.000000000000001
-->1+1.E-16
 ans  =
  1        <= 1.E-16 est négligeable devant 1
-->1+1.E-16-1
 ans  =
   0.          <= on obtient 0 au lieu de 1.E-16
-->1/(1+1.E-15-1)
 ans  =
   900719925474099.2
-->1/(1+1.E-16-1)
 ans  =
   Inf      <= 1.E-16 est négligeable devant 1, on a divisé par 0
```

Les arrondis

Par exemple, arrondi avec 4 chiffres après la virgule de 3,14159

- Par défaut : 3,1415
- Par excès : 3,1416
- Au plus proche : 3,1416

Erreurs d'arrondis + propagation des erreurs

Propagation d'erreurs

(Jean-François Colonna)

Un simple calcul : $b = 4095{,}1 \quad a = b + 1 \quad x = 1 \quad x = a \times x - b$

que vaut x ? 1

je recalcule $x = a \times x - b$ que vaut x ? 1

$\vdots$

je continue $x = a \times x - b$ que vaut x ? 1

Calcul en Scilab

```
-->b=4095.1
 b  =
   4095.1
-->a=b+1
 a  =
   4096.1
-->x=1
 x  =
   1.
-->for i=1:9
-->  x=a*x-b
-->end
 x  =
   1.0000000000005
 x  =
   1.0000000018631
 x  =
   1.0000076314441
 x  =
   1.0312591580864
 x  =
   129.04063743776
 x  =
   524468.25500881
 x  =
   2148270324.2416
 x  =
   8799530071030.8
 x  =
   3.604375512D+16
```

On diverge très rapidement en faisant 9 fois le calcul

Résultats étranges

– Pythagore : le triangle de côtés 1, 2 et $\sqrt{3}$ est-il rectangle ?

– Géométrie : les vecteurs de coordonnées $\left(\sqrt{2}\,,\,3\right)$ et $\left(\dfrac{4}{3},\sqrt{8}\right)$ sont-ils colinéaires ?

Calcul en Scilab

```
-->a=1; b=sqrt(3); c=2;
-->a^2+b^2 == c^2
 ans  =
  F
```

<= l'égalité est fausse : le triangle n'est pas rectangle !

```
-->x1=sqrt(2); y1=3;
-->x2=4/3; y2=sqrt(8);
-->x1*y2 == y1*x2
 ans  =
  F
```

<= l'égalité est fausse : les vecteurs ne sont pas colinéaires !

Le test ne marche pas !

Précision de 16 chiffres avec une erreur relative de

$$\varepsilon = 2,220446049 \times 10^{-16}$$

Le test doit donc être relatif : $\left|\dfrac{a-b}{a}\right| < \varepsilon$

Avec $|x| = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } -x \text{ si } x < 0$ (valeur absolue)

Calcul en Scilab

```
-->%eps
 %eps  =
   2.220446049D-16
```

<= %eps est la plus petite erreur relative

```
-->a=1; b=sqrt(3); c=2;
-->abs((a^2+b^2-c^2)/c^2) < %eps
 ans  =
  T



-->x1=sqrt(2); y1=3;
-->x2=4/3; y2=sqrt(8);
-->abs((x1*y2-y1*x2)/(x1*y2)) < %eps
 ans  =
  T
```

Le test marche à nouveau !

Et les valeurs approchées à 10^{-n} près ?

– Valeur approchée à 10^{-2} près du volume d'un pavé droit de côtés $\frac{4}{3}$, $\sqrt{2}$ et $\frac{5}{7}$.

on prend : $a = \frac{4}{3} \approx 1,33$ $\quad b = \sqrt{2} \approx 1,41$ $\quad c = \frac{5}{7} \approx 0,71$

$abc = 1,331463 \approx 1,33$ La vraie valeur est $\approx 1,34687$!!!

– Pourcentage d'augmentation à 10^{-2} près entre 53 € et 56 €

on prend : $\frac{56}{53} \approx 1,06$

et donc : $(1,06 - 1) \times 100 = 6\%$!!! au lieu de $5,66\%$!!!

Qu'en déduire ?

Le calcul numérique est incontournable

Mais il faut faire attention

Le logiciel de calcul numérique Scilab

Comment faire du calcul numérique ?

- La calculatrice

- Le tableur

Mieux : les logiciels de calcul numérique !

La calculatrice

Avantages

- C'est pas cher
- Bien adapté aux programmes de lycées

Inconvénients

- C'est cher
- Pas toujours performant
- Graphique peu lisible
- Langage peu facile à manipuler
- Peu utilisé après le lycée

Tout le calcul numérique fait avec une calculatrice peut être fait « en mieux » avec Scilab

Le tableur : Excel ou Calc

Un tableur doit être utilisé comme un tableur :

- Pour « voir » des valeurs évoluer en fonction de paramètres
- Pour gérer une petite base de données

Un tableur « n'est pas fait » pour faire :

- Du calcul numérique
- De la programmation => pas de « vrai langage »

Tout le calcul numérique fait avec un tableur peut être fait « en mieux » avec Scilab

Pourquoi utiliser Scilab ?

Logiciel gratuit : peut être utilisé partout

- Par les élèves au lycée et à la maison

Logiciel puissant :

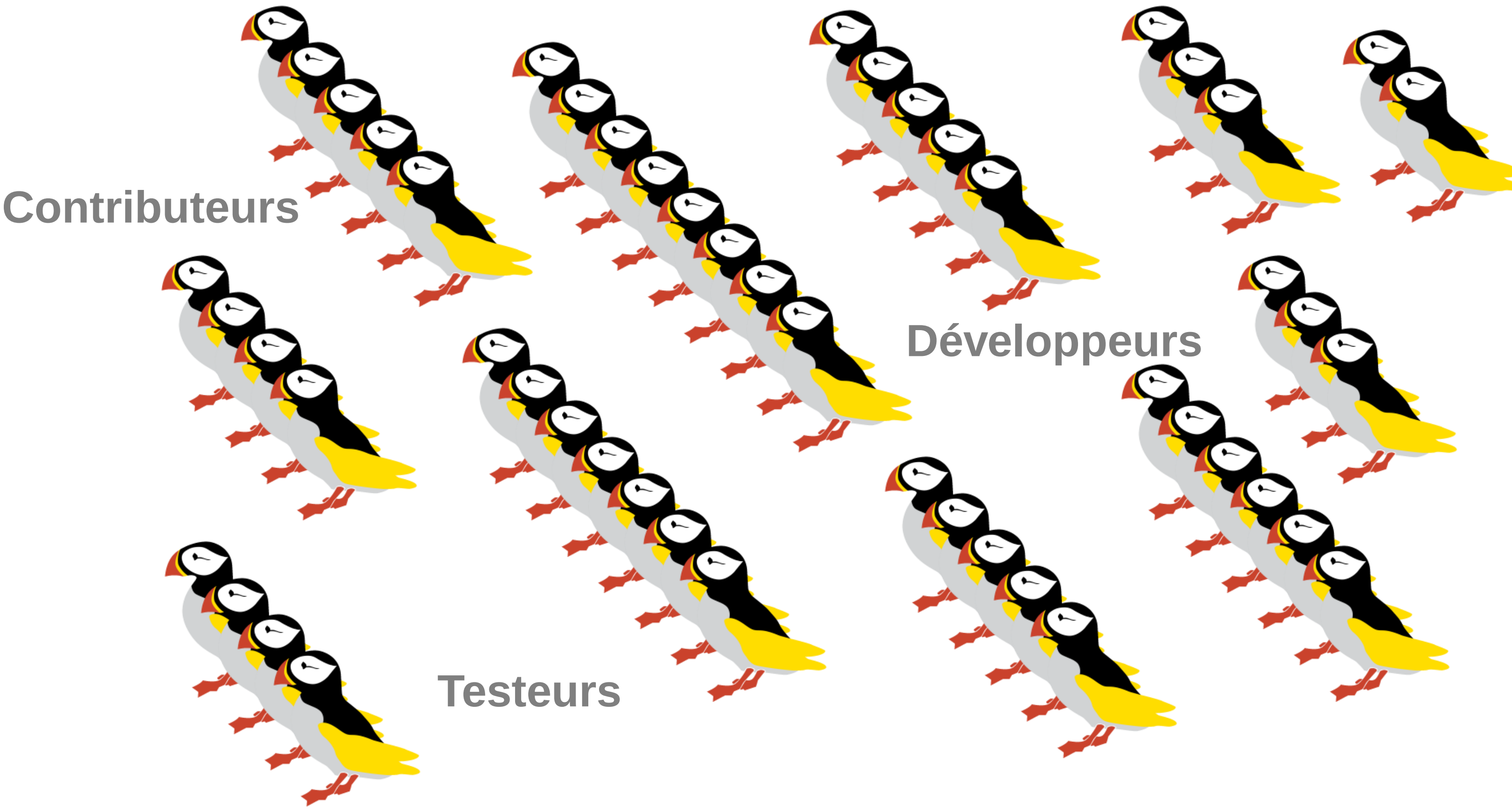
- Super calculateur graphique simple et rapide
- Programmation facile

Logiciel utilisé dans la vie professionnelle

- À l'université et dans les écoles d'ingénieurs, dans la recherche, dans les entreprises

Scilab est un logiciel libre :

soutien de la communauté des utilisateurs



Un exemple de simulation avec Scilab

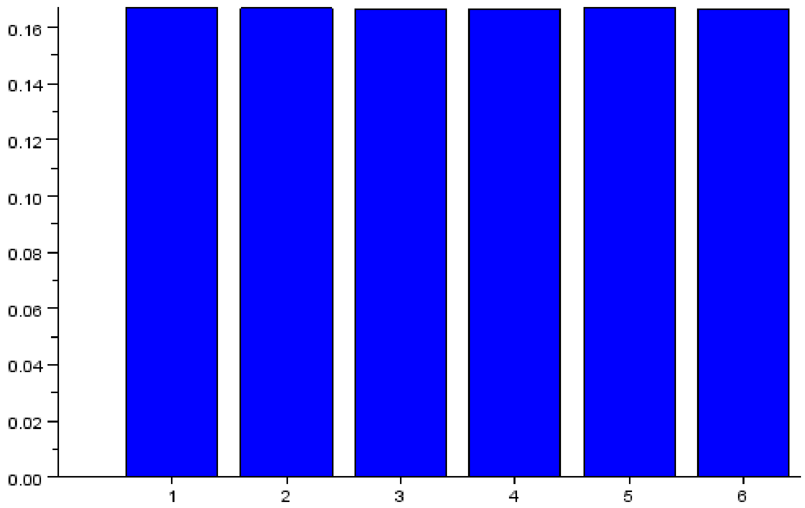
Lancer de dés

-->f=frequence_tirage_entier(100000,1,6)
 f =
   0.16534   0.16545   0.16816   0.16563   <= fréquence de 100 000 tirages de dés
0.16693   0.16849

Il faut faire 1 000 000 de tirages pour avoir un résultat presque équiprobable (temps de calcul < 1 s) :

-->f=frequence_tirage_entier(1000000,1,6)
 f =
   0.166916   0.166854   0.166328   0.16650
0.167173   0.166226

-->bar(f)   <= tracé du diagramme en barres



Conclusion

Utilisez le calcul numérique…

…même si les calculs sont approchés.

Et si vous faites du calcul numérique…

www.scilab.org