Principe du maximum.

Pierre Bornsztein, Avril 2012.

Exercice 1.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé. A chaque point à coordonnées entières, on attribue un entier naturel qui est la moyenne arithmétique des entiers attribués à ses quatre voisins (ceux situés à une distance unité). Prouver qu'on a attribué le même nombre à chaque point.

Exercice 2.
Lors d'une soirée, aucun garçon n'a dansé avec chacune des filles, et chaque fille a dansé avec au moins un garçon.
Prouver qu'il existe deux garçons g, g' et deux filles f, f' tels que g ait dansé avec f mais pas avec f', et g' ait dansé avec f' mais pas avec f.

Exercice 3.
Douze candidats au poste de maire participent à un débat télévisé. Au bout d'un moment, l'un d'eux déclare "jusque là, on a menti une seule fois." Un deuxième dit alors "Maintenant, cela fait deux fois." Un troisième s'exclame alors "Trois fois, maintenant" et ainsi de suite jusqu'au douzième qui affirme qu'avant lui on a menti douze fois. Le présentateur arrête alors la discussion. Sachant qu'au moins un des candidats a correctement annoncé combien de fois on avait menti avant sa prise de parole, déterminer combien de candidats ont menti au total.

Exercice 4.
On considère $2n$ points du plan, trois quelconques jamais alignés. On suppose que n sont colorés en rouge, et les n autres en bleu. Montrer que l'on peut tracer n segments, deux à deux sans point commun, de sorte que tout point rouge soit relié à un point bleu et que tout point bleu soit relié à un point rouge.

Exercice 5. (Olympiades académiques Versailles 2003)
Soit P un 2003-gone convexe tel que, pour tout sommet A de P, les 2000 diagonales issues de A divisent l'angle $\widehat{A}$ en 2001 angles égaux.
Prouver que P est un polygone régulier.

.

Exercice 6.
Dans chaque case d'un tableau $n \times n$ est inscrit un nombre réel ($n \geq 2$). Lorsque l'on calcule la somme des deux plus grands nombres d'une même ligne, on trouve toujours le même résultat a. Lorsque l'on calcule la somme des deux plus grands nombres d'une même colonne, on trouve toujours le même résultat b. Prouver que $a = b$.

Exercice 7.
Soit $n > 0$ un entier. Chacune des n filles d'un groupe est la seule à connaître un certain potin. Pour partager leurs informations, elles se téléphonent deux à deux, mais à chaque fois, seule l'une parle et l'autre ne fait qu'écouter toutes les informations que son amie lui transmet. Déterminer le nombre minimal de coups de téléphone suffisant pour que chacune des filles connaisse tous les potins.

Exercice 8. (Théorème de Sylvester).
Soit E un ensemble fini non vide de points du plan tel que toute droite passant par deux points de E en contienne au moins un troisième.
Prouver que E est contenu dans une droite.

Exercice 9.
Trois pays ont chacun envoyé n mathématiciens à une conférence. Chaque mathématicien a des échanges avec $n+1$ des mathématiciens qui ne sont pas de son pays. Prouver qu'il existe trois mathématiciens qui ont deux à deux eu des échanges.

Exercice 10.
Soit $n > 0$ un entier. Un disque est divisé en $2n$ secteurs égaux. La moitié d'entre eux sont coloriés en rouge et les autres en bleu. A partir de secteurs arbitraires, les secteurs bleus sont numérotés de 1 à n dans le sens direct, alors que les secteurs rouges sont numérotés de 1 à n dans le sens indirect. Prouver qu'il existe un demi-disque formé de secteurs numérotés de 1 à n dans un certain ordre.

Exercice 11.
Un polygone *simple* est un polygone dont les côtés ne s'intersectent pas.
Soit P un polygone simple ayant au moins quatre sommets.
Prouver que P possède une diagonale intérieure.