MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Stage ouvert aux élèves de seconde
Lundi 14 et mardi 15 avril 2014

Lycée Pissarro Pontoise, lycée Jean-Baptiste Corot Savigny sur Orge
Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 8 ans, et bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry et le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette. Bien qu'elle les ait précédés, son action s'inscrit dans le Plan sciences ministériel et singulièrement dans le projet MathC2+.

Les actions de la Pépinière académique ne sont pas des « stages de vacances ». Il est attendu des participants un véritable engagement, ce qui n'est pas contradictoire avec la bonne humeur.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Marie-Françoise BOURDEAU, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

Les professeurs intervenant : Fathi ABDELKARIM (Lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE), Fabienne ARGOUD (Lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE), François BARNY (Lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Antoine CROUZET (Lycée La Folie Saint James, NEUILLY SUR SEINE), Isabelle DE GRACIA (Lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Paul-Emile Victor, OSNY), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Philippe JULIEN (Lycée international, SAINT GERMAIN EN LAYE), Jérôme MORAND (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sébastien MOULIN (Lycée Emmanuel Mounier, CHATENAY MALABRY), Maud PARTIER (Lycée Charles de Gaulle, POISSY)

L'organisation à l'université : Florence GOEHRS

Emploi du temps

Lundi 14 avril 2014

<table>
<tr><th></th><th>Groupe P
Pontoise</th><th>Groupe 1
Versailles</th><th>Groupe 2
Versailles</th><th>Groupe 3
Versailles</th><th>Groupe S
Savigny</th></tr>
<tr><td>10 heures</td><td>Calculs
et équations
OD + JL</td><td>Cryptographie
CD</td><td>Calculs
et équations
SM</td><td>Angles
et distances
PM</td><td>Aires
et Volumes
NF</td></tr>
<tr><td>12 heures</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td rowspan="2">◀◀◀
▶▶▶</td><td>Film : l’empire
des nombres</td><td>Film : l’empire
des nombres</td></tr>
<tr><td rowspan="2">13 heures

14 heures</td><td rowspan="2">Calculs d’angles
et distances
OD + JL</td><td>Film : l’empire
des nombres</td><td>Repas</td><td>Repas</td></tr>
<tr><td>Angles
et distances
PM</td><td>Cryptographie
CD</td><td>Calculs
et équations
SM</td><td>Arithmétique
JD+ NF</td></tr>
<tr><td>15 heures</td><td>Cryptographie
BB</td><td>Calculs
et équations
SM</td><td>Angles
et distances
PM</td><td>Cryptographie
CD</td><td>Probabilités,
logique
F. AB.</td></tr>
</table>

Mardi 15 avril 2014

<table>
<tr><th></th><th>Groupe P
Pontoise</th><th>Groupe 1
Versailles</th><th>Groupe 2
Versailles</th><th>Groupe 3
Versailles</th><th>Groupe S
Savigny</th></tr>
<tr><td>10 heures</td><td>Probabilités,
logique
CH</td><td>Arithmétique
MP</td><td>Probabilités,
logique
PJ</td><td>Aires
et volumes
YE</td><td>Angles
et distances
F.AR.</td></tr>
<tr><td>12 heures</td><td>Film : l’empire
des nombres</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td>Repas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">13 heures

14 heures

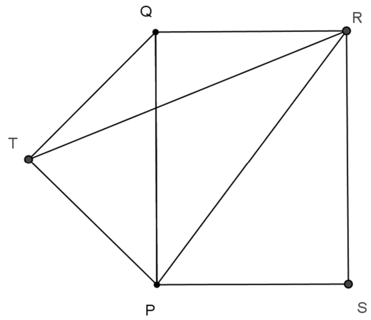
15 heures
ou
15 h 30</td><td>Repas</td><td rowspan="2">Aires
et volumes
YE</td><td rowspan="2">Arithmétique
MP</td><td rowspan="2">Probabilités,
logique
PJ</td><td rowspan="2">Calculs et
équations
FB</td></tr>
<tr><td>Arithmétique
JM</td></tr>
<tr><td>Aires et
volumes
CH</td><td>Probabilités,
logique
PJ</td><td>Aires
et volumes
YE</td><td>Arithmétique
MP</td><td>Cryptographie
IDG</td></tr>
</table>

N.B. Les horaires peuvent légèrement varier d’un centre à l’autre.

Thème : aires et volumes

1. Le triangle ennemi

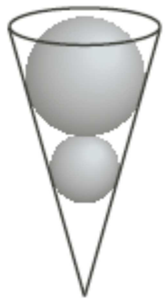
Jacqueline se casse la tête avec un triangle NMI, rectangle en I, dont elle doit calculer l'aire. Sa seule information est que les médianes (MD) et (NE) se coupent en O de telle sorte que la longueur de OD est de 3 et celle de OE est de 4. Aidez-la à trouver l'aire de ce triangle.



2. Rectangle et triangles

Soit PQRS un rectangle et T le point situé à l'extérieur du rectangle de telle sorte que le triangle PTQ soit isocèle et rectangle en T (voir figure ci-contre). Sachant que PQ = 4 et que QR = 3, calculer l'aire du triangle PTR.

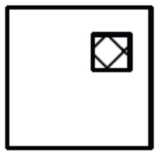
3. Cône et sphères



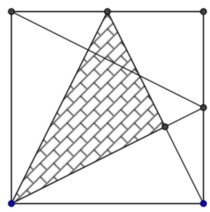
Un cône est rempli d'eau. On place deux boules sphériques dans le cône, ce qui fait déverser une partie de l'eau hors du cône. Les boules se touchent l'une l'autre, elles touchent le cône tout autour et le haut de la boule du haut est au même niveau que le haut du cône. Le rayon de la grande boule est deux fois plus grand que le rayon de la petite boule.

Sachant que le volume de l'eau qui reste dans le cône est 2016π , quel est le rayon de la petite boule ?

4. Des carreaux carrés pour carreler une salle carrée



Le dessin ci-contre n'est pas à l'échelle. Il représente une salle carrée d'un musée et, à l'intérieur, le socle carré d'une statue. Pour carreler cette pièce, sans le socle, il a fallu exactement, sans les couper, 391 carreaux carrés de 20 cm de côté. On suppose que l'aire du socle est inférieure à l'aire de la surface carrelée. Quelles sont les dimensions de la salle et du socle ?

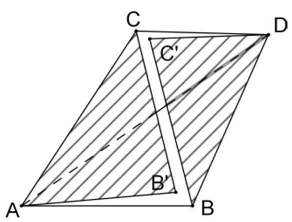


5. Les ronds noirs de la figure sont situés au milieu de deux côtés consécutifs d'un carré. Les côtés du triangle gris mesurent des nombres entiers de centimètres.

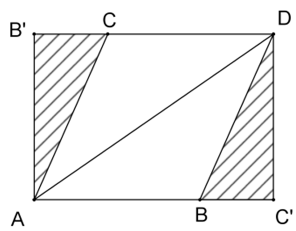
Quelle est, au minimum, la surface du carré, en centimètres carrés ?

26e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques Demi-finale 2011-2012

6. Découpage du tétraèdre



Un tétraèdre en carton ABCD a été découpé le long des arêtes [AB], [BC], [CD]. On l'a ensuite mis à plat et on a obtenu un rectangle de 9 dm sur 5 dm. Quel était le volume du tétraèdre initial ?



Thème : Calculs et équations

1. Mise en jambe

Quel est le chiffre des unités du nombre $5^{35} - 6^{21}$?

2. Soit *m*, *n* et *p* des entiers strictement positifs tels que $m + \dfrac{1}{n + \dfrac{1}{p}} = \dfrac{17}{3}$. Calculer *n*.

3. Simplification

Simplifier le produit suivant : $\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2013^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2014^2}\right)$.

Plus généralement, pour tout entier n supérieur à 2, simplifier l'expression :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

4. Zéros trainants

On dit qu'un entier positif *n* a *k zéros trainants* si ses *k* derniers chiffres sont des zéros et s'il y a un chiffre non nul immédiatement à gauche de ces *k* zéros.

Par exemple, le nombre 1 030 000 a 4 zéros trainants.

On note $Z(n)$ le nombre de *zéros trainants* de l'entier strictement positif *n*.

Pour tout entier *n* strictement positif, on appelle « factorielle *n* », que l'on note $n!$, le produit des entiers de 1 à *n*.

Un jour qu'il s'ennuie, Louis fait une liste des valeurs de l'expression $n - Z(n!)$ pour chaque valeur comprise entre 100 et 10 000 (inclusivement) de l'entier *n*.

Combien d'entiers paraissent au moins trois fois dans la liste de Louis ?

5. Addition mystère

Dans l'addition ci-contre, les lettres X, Y et Z représentent chacune un chiffre non nul différent.

Quel est le chiffre représenté par la lettre X ?

$$\begin{array}{r} X\,X\,X \\ Y\,Y\,Y \\ +\ Z\,Z\,Z \\ Z\,Y\,Y\,X \end{array}$$

6. Remonter à la racine du symbole

Vous devez déchiffrer un code vous donnant la valeur du nombre Ξ vérifiant l'égalité :

$$\Xi = \left| \sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right|$$

en sachant que $\sqrt[3]{\Lambda} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Lambda}} = 3$. Quelle est donc la valeur du nombre Ξ ?

7. Le temps qui passe

On considère un rameur dans un canoë sur une rivière. La vitesse du courant de la rivière est supposée constante et on l'évalue à 10 km/h. La vitesse du canoë en eau calme est aussi supposée constante. Toutefois, en présence de courant, cette dernière est influencée selon que le rameur avance à contre-courant (ce qui le ralentit) ou avec le courant (ce qui l'accélère).

Les questions (1) et (2) ci-dessous sont indépendantes l'une de l'autre.

a. Il faut au rameur une heure de plus pour parcourir 2,2 km en remontant le courant que pour parcourir la même distance en le descendant. Quelle est la vitesse du canoë en eau calme ?

b. Il faut au rameur deux fois plus de temps pour parcourir 2,2 km en remontrant le courant que pour parcourir la même distance en le descendant. Quelle est la vitesse du canoë en eau calme ?

8. Jogging

Luc et Lucie s'exercent en parcourant le même chemin. Pendant la première moitié du parcours, Lucie fait du jogging à une vitesse de 6 km/h. Pendant le reste du parcours, elle court à une vitesse de 12 km/h. Elle met x heures pour faire le parcours complet.

Pendant le premier tiers du parcours, Luc marche à une vitesse de 5 km/h pendant le reste du parcours, il court à une vitesse de 15 km/h. Il met y heures pour faire le parcours complet.

Quelle est la valeur de $\frac{x}{y}$?

9. Combien y a-t-il de triplets (a,b,c) d'entiers positifs tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{4}$?

Thème : Probabilités, dénombrement, logique

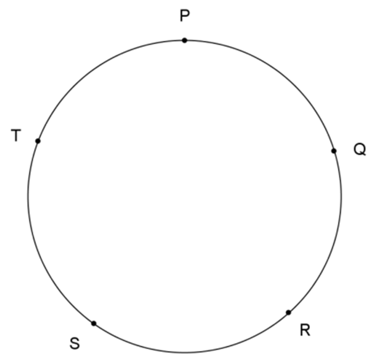
1. Des sacs et des billes

Un sac contient 2 billes rouges et 2 billes bleues. Un deuxième sac contient 2 billes rouges, 2 billes bleues et v billes vertes $(v > 0)$.

Pour chaque sac, Marie calcule la probabilité d'obtenir deux billes d'une même couleur en tirant au hasard deux billes du même sac, l'une après l'autre, sans remettre la première bille dans le sac. Sachant que ces deux probabilités sont égales, quelle est la valeur de v ?

2. Singes autour d'une table

Cinq singes sont assis autour d'une table. Leurs places sont indiquées par les lettres P, Q, R, S et T, placées en ordre, dans le sens des aiguilles d'une montre, comme dans la figure ci-contre. Les cinq singes sont numérotés au hasard et on les appelle Singe 1, Singe 2, Singe 3, Singe 4 et Singe 5.



Singe 1 reste assis à sa place. Les quatre autres singes s'assoient ensuite aux places libres de manière que l'on retrouve Singe 1, Singe 2, Singe 3, Singe 4 et Singe 5 assis dans cet ordre, dans le sens des aiguilles d'une montre. Quelle est la probabilité pour que le singe qui était à la place R se retrouve maintenant à la place P ?

3. Échanges de livres

Six amis échangent des livres dans leur club de lecture. Chaque ami a un livre qu'il donne à un ami et reçoit un livre d'un autre ami. (aucune paire d'amis n'échangent leur livre l'un avec l'autre).
Combien y a-t-il de façons d'échanger les livres ?

4. Tableau de Fano

Un *tableau de Fano* est un tableau de trois colonnes tel que il existe un entier n tel que :

- Chaque case du tableau contient un entier de la liste 1, 2, 3, …, n ;
- Chaque rangée contient trois entiers différents ;
- Pour chaque paire d'entiers distincts de la liste 1, 2, 3, …, n, il y a exactement une rangée du tableau qui contient ces deux entiers.

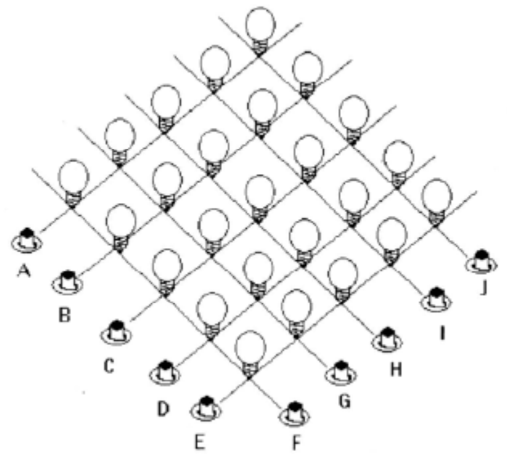
1	2	4
2	3	5
3	4	6
4	5	7
5	6	1
6	7	2
7	1	3

Le nombre de rangées du tableau dépend de la valeur de l'entier n.
Par exemple, le tableau ci-contre est un tableau de Fano avec $n = 7$
(on remarque que le 2 et le 6 ne paraissent qu'une fois ensemble dans une rangée)
Et il en est de même pour n'importe quelle paire d'entiers de la liste 1, 2, 3, …, n.
Pour combien de valeurs, comprises entre 3 et 12 au sens large, de l'entier n peut-on former un tableau de Fano ?

5. Hippolyte place trois pièces de monnaie dans un sac. Une d'entre elles est tout à fait normale, et comporte donc un côté "pile" et un côté "face" , mais les deux autres sont fausses: les deux côtés sont identiques, "pile" pour une d'entre elles et "face" pour l'autre. Hippolyte plonge sa main dans le sac et en retire une pièce au hasard; de façon toujours aléatoire, il regarde un des côtés qui se trouve être du type "pile". Avant de retourner la pièce, Hippolyte s'interroge : "L'autre côté sera-t-il lui aussi "pile" ou sera-t-il "face" ? " A votre avis, quelle est l'hypothèse la plus probable ?

6. Une urne contient *n* boules numérotées de 1 à *n*. On tire les boules une à une avec remise. Quelle est la probabilité que, sur *m* tirages, le plus grand des numéros tirés soit *k* ?

7. Raoul se confectionne un circuit électrique formé de vingt-cinq ampoules disposées en carrés et de dix interrupteurs, notés de A à J, comme sur le dessin.



S'il appuie sur un interrupteur, alors les cinq ampoules situées sur la ligne de cet interrupteur voient leur état inversé : celles qui sont allumées s'éteignent et celles qui sont éteintes s'allument.

(a) Montrer que, quel que soit l'état initial des ampoules (certaines ampoules peuvent être allumées tandis que d'autres, non), il est toujours possible de manipuler les interrupteurs de telle sorte que, dans chacune des dix rangées correspondantes, il y ait toujours plus d'ampoules allumées qu'éteintes

(b) Est-il possible d'allumer toutes les ampoules quelle que soit la configuration initiale ?

Thème : arithmétique (multiples et diviseurs)

1. Alice et Bob expérimentent le jeu suivant. On commence avec 30 jetons. A tour de rôle, chaque joueur ôte du jeu 1, 2, 4, 8 ou 16 jetons (une puissance de 2). Un joueur qui ne peut rien enlever perd la partie. Alice a le choix de commencer ou non. Le devrait-elle ? Quelle est sa stratégie ?

2. Il y a deux façons de choisir six nombres différents dans la liste 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de manière que le produit des six nombres soit un carré parfait. Soit m^2 et n^2 les deux carrés parfaits que l'on peut obtenir, *m* et *n* étant des entiers strictement positifs tels que $m \neq n$. Quelle est la valeur de $m+n$?

3. Juliette aime faire des expériences mathématiques. Aussi, a-t-elle été fort intriguée quand elle a observé que si on fabrique un nombre en juxtaposant un certain nombre de fois le chiffre 1 puis autant de fois le chiffre 8, alors le quotient obtenu en divisant ce nombre par 18 semble toujours être un entier ! Elle a de plus remarqué qu'à partir de 111 888, le quotient obtenu en divisant par 18 semble toujours être lui-même divisible par 4.
Elle a illustré ses observations dans le tableau ci-contre pour les premières valeurs de *n* :

Nombre de chiffres « 1 »	Nombre fabriqué N	Quotient Q et reste R de la division de N par 18	Factorisation par 4
2	N = 1 188	Q = 66 et R = 0	
3	N = 111 888	Q = 6 216 et R = 0	$4 \times 1\,554$
4	N = 11 118 888	Q = 6 17 716 et R = 0	$4 \times 154\,429$
5	N = 1 111 188 888	Q = 61 732 716 et R = 0	$4 \times 15\,433\,179$
6	N = 111 111 888 888	Q = 6 172 882 716 et R = 0	$4 \times 1\,543\,220\,679$

(a) Démontrer que ces observations sont toujours vraies.

(b) Trouver tous les nombres à deux chiffres $\overline{AB}$ (avec *A* distinct de *B*) tels que pour tout entier naturel *n* non nul, le nombre $\overline{\underbrace{A...A}_{n \text{ chiffres}}\underbrace{B...B}_{n \text{ chiffres}}}$ soit divisible par $\overline{AB}$.

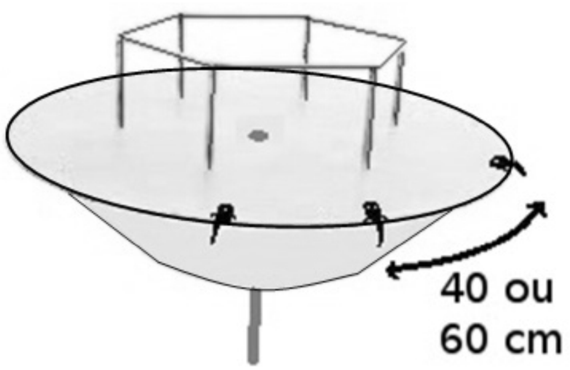
4. En bon client d'un magasin, Vincent dispose d'une carte de fidélité qui lui donne droit à une réduction systématique sur tous les articles. Comme le magasin fête son anniversaire, il bénéficie d'une deuxième remise sur le prix réduit.
Ainsi, pour acheter une calculatrice marquée à 345 €, il ne paie que 301,53 €.
Une fois rentré chez lui, il ne se souvient plus des pourcentages des deux réductions successives. Mais il est sûr qu'ils étaient entiers et inférieurs à 10. Aidez-le à retrouver ces deux pourcentages

5. Déterminer les entiers *n* ayant exactement 16 diviseurs :$1 = d_1 < d_2 < . . . < d_{15} < d_{16} = n$
et tels que $d_6 = 18$ et $d_9 - d_8 = 17$.

6. Combien y a-t-il de triangles dont tous les angles ont des mesures en degrés qui sont des entiers diviseurs stricts de 360 ?

7. Papa crapaud lâche ses têtards au centre d'un tourniquet en mouvement. A l'arrêt, il les retrouve tous sur la circonférence qui mesure 4,80 m, certains étant espacés de 40 cm et les autres de 60 cm.

Combien y a-t-il de têtards sur ce tourniquet sachant qu'aucun ne se trouve diamétralement opposé à un autre ?



Rallye Mathématique d'Aquitaine 2013

Thème : Calcul d’angles et de distances

Exercice 1

Les angles en A, B, C et D du quadrilatère ABCD mesurent respectivement 110°, 110°, 35° et 105°. De plus, [AC) est la bissectrice de l’angle $\widehat{DAB}$.
Combien mesure l’angle $\widehat{ABD}$?

Exercice 2

Sur l’hypoténuse [BC] du triangle ABC rectangle en A, on construit le carré BDEC. Les droites (AD) et (AE) coupent le segment [BC] respectivement en P et Q. Les perpendiculaires à (BC) menées par P et Q coupent respectivement les côtés [AB] et [AC] en S et R.
1. Montrer que PQRS est un carré. Ce résultat est-il lié à la nature du triangle ABC ?
2. Montrer que $BC \leq 3PQ$. Dans quels cas y a-t-il égalité ?

Exercice 3 Un problème de construction

Les trois sommets A, B et C d’un triangle équilatéral appartiennent respectivement à trois cercles concentriques de rayon respectif 1, 2 et 3.
Construire un tel triangle.

Exercice 4 Orthocentre

Sur les côtés [BC] et [CD] d’un carré ABCD, on place les points M et N, respectivement, tels que CM = DN. Les droites (BN) et (DM) se coupent en P. Montrer que la droite (AP) et perpendiculaire à la droite (MN).

Exercice 5 Découpage

Deux cercles concentriques de rayons 1 et 2 sont coupés par une sécante, en A et B pour le grand cercle, en C et D pour le petit, de sorte que AB = 3. CD et AC = CD.
Combien vaut AB ?

Exercice 6 Cerf-volant

Dans le cerf-volant ABCD (les côtés [AB] et [AD] ont la même longueur, les côtés [BC] et [CD] ont la même longueur), on considère la parallèle à (CD) passant par A, qui coupe [BC] en K et [BD] en L. La parallèle à (BC) passant par L coupe [CD] en M.
Comparer les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AKM}$.