Augusta Ada King, countess of Lovelace (1815-1852)

La programmation de la machine de Babbage.
Le calcul des nombres de Bernoulli.

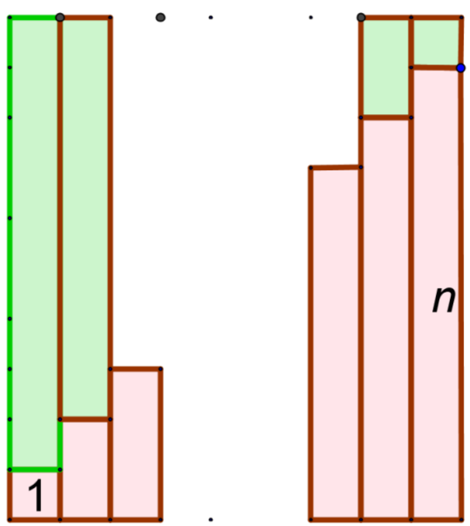
Plan de l’exposé

1. Sommes de puissances d’entiers consécutifs

   et nombres de Bernoulli
2. La machine de Babbage
3. Les premiers programmes

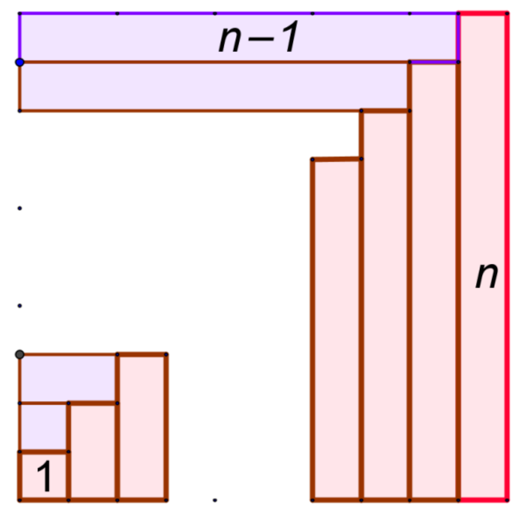
Somme des entiers inférieurs à *n*

Plusieurs façons d'aborder les nombres triangulaires



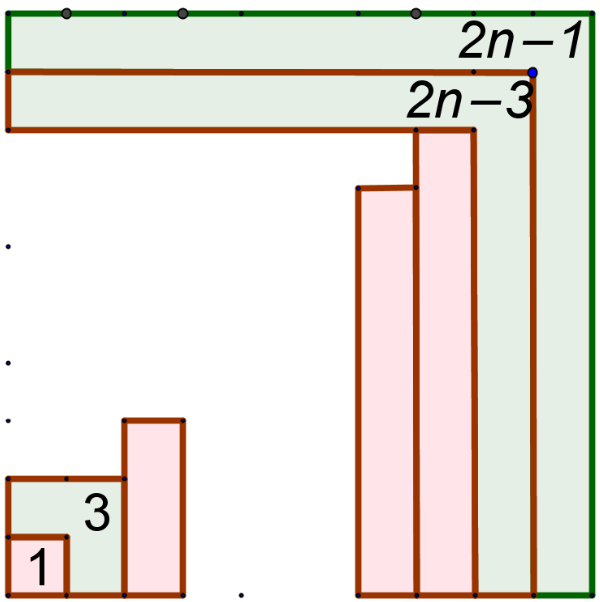
Le calcul du petit Gauss

Deux triangulaires successifs



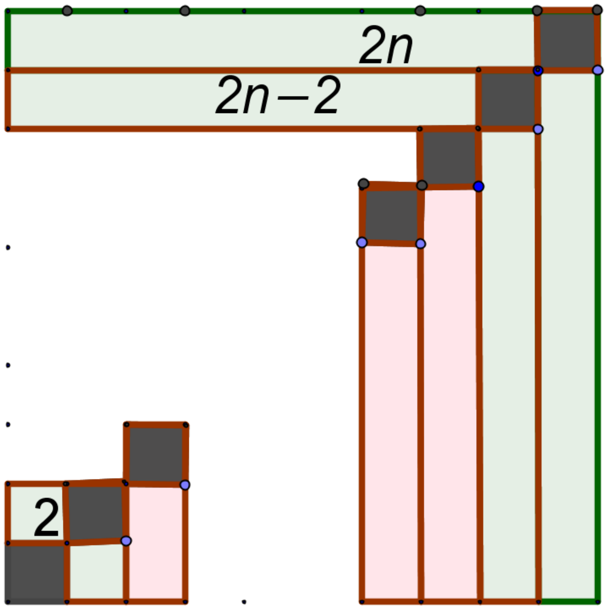
$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La somme des premiers impairs



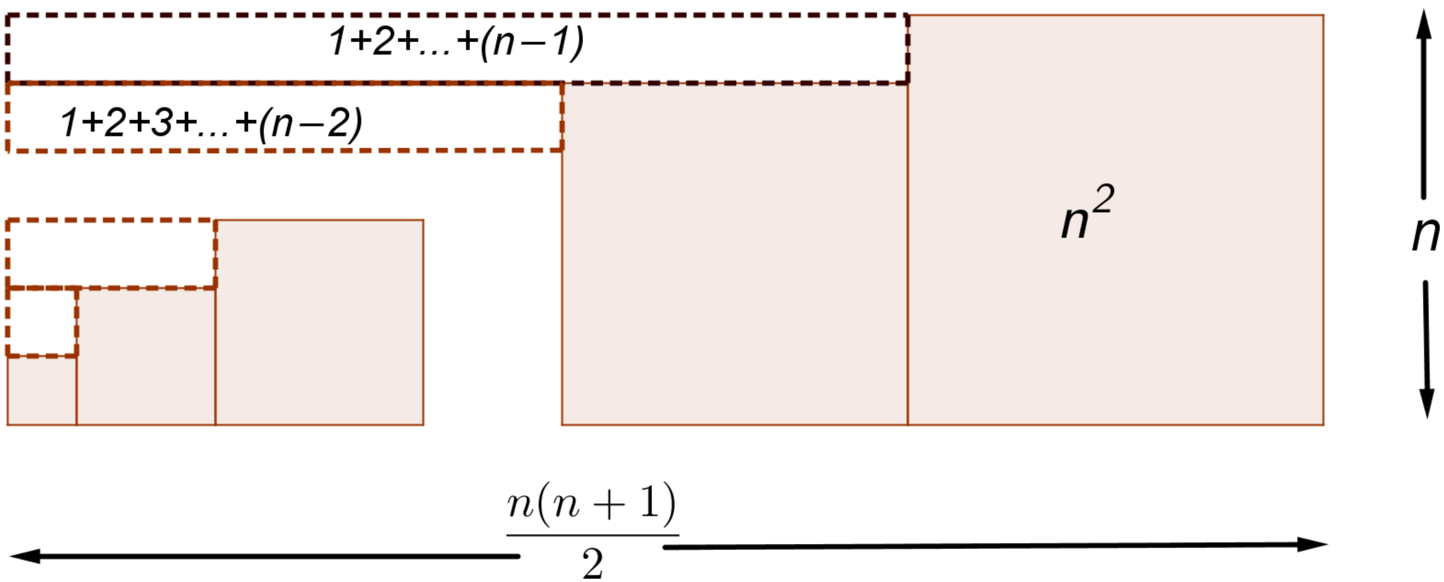
$$\sum_{p=1}^{n}(2p-1)=n^2$$

La somme des premiers pairs



$$\sum_{p=1}^{n}2p=n^2+n$$

Somme des carrés



$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = n\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p(p+1)}{2}$$

Soit $$\frac{3}{2}S_2(n) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n^2}{2}$$

Finalement :

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bon… autre méthode

$$1^3 = (0+1)^3 = 0^3 + 3 \times 0^2 \times 1 + 3 \times 0 \times 1^2 + 1^3$$
$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times 1 + 3 \times 1 \times 1^2 + 1^3$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times 1 + 3 \times 2 \times 1^2 + 1^3$$

#

#

$$(n+1)^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3 \times n^2 \times 1 + 3 \times n \times 1^2 + 1^3$$

$$(n+1)^3 \quad = \qquad 3 \times S_2(n) + 3 \times S_1(n) + (n+1)$$

… qui redonne le résultat précédent

Exercice

Avec l'égalité

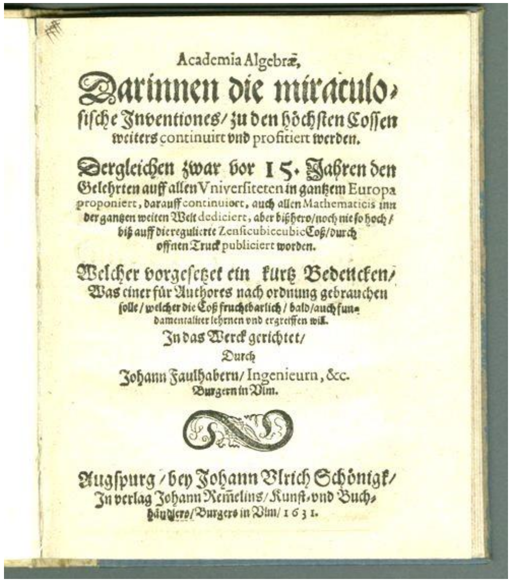
$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

On obtient le remarquable résultat :

$$\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

La somme des cubes des entiers inférieurs à n est le carré de leur somme.

Où cela nous mène-t-il ?

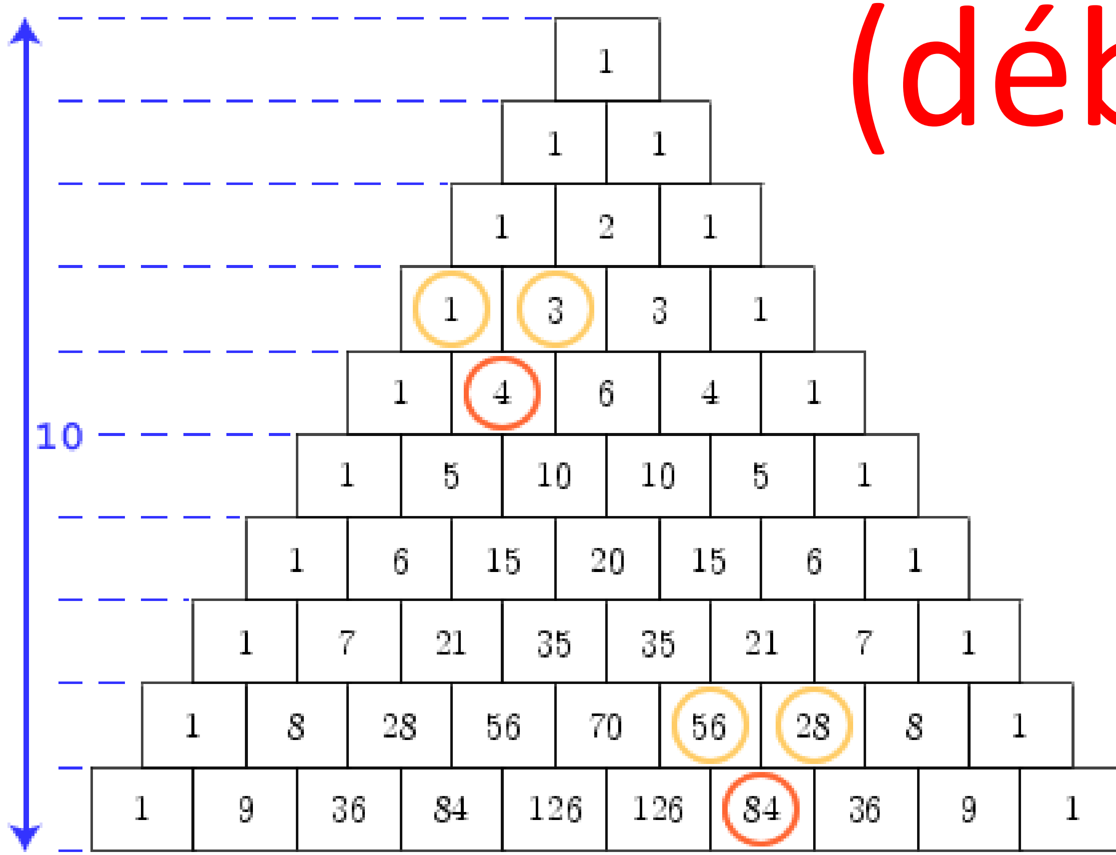

Academia Algebræ,
Darinnen die miraculo-
sische Inventiones/ zu den höchsten Cossen
weiters continuirt vnd profitiert werden.
Dergleichen zwar vor 15. Jahren den
Gelehrten auff allen Vniversiteten in gantzem Europa
proponiert, darauff continuiert, auch allen Mathematicis inn
der gantzen weiten Welt dediciert, aber bißhero/noch nie so hoch/
biß auff die regulierte Zensicubiccubic Coß/durch
offnen Truck publiciert worden.
Welcher vorgesetzet ein kurtz Bedencken/
Was einer für Authores nach ordnung gebrauchen
solle/ welcher die Coß fruchtbarlich/ bald/auch fun-
damentaliter lehrnen vnd ergreiffen will.
In das Werck gerichtet/
Durch
Johann Faulhabern/ Ingenieurn, &c.
Burgern in Vlm.
Augspurg/ bey Johann Vlrich Schönigk/
In verlag Johann Remelins/ Kunst- vnd Buch-
händlers/ Burgers in Vlm/ 1631.

La somme des puissance k-ièmes des n premiers entiers est un polynôme de degré k+1 (à coefficients entiers).
Johann FAULHABER (1580 – 1635) assure l'avoir établi jusqu'à $k = 27$ dans *Academia algebrae* (Augsbourg 1631)

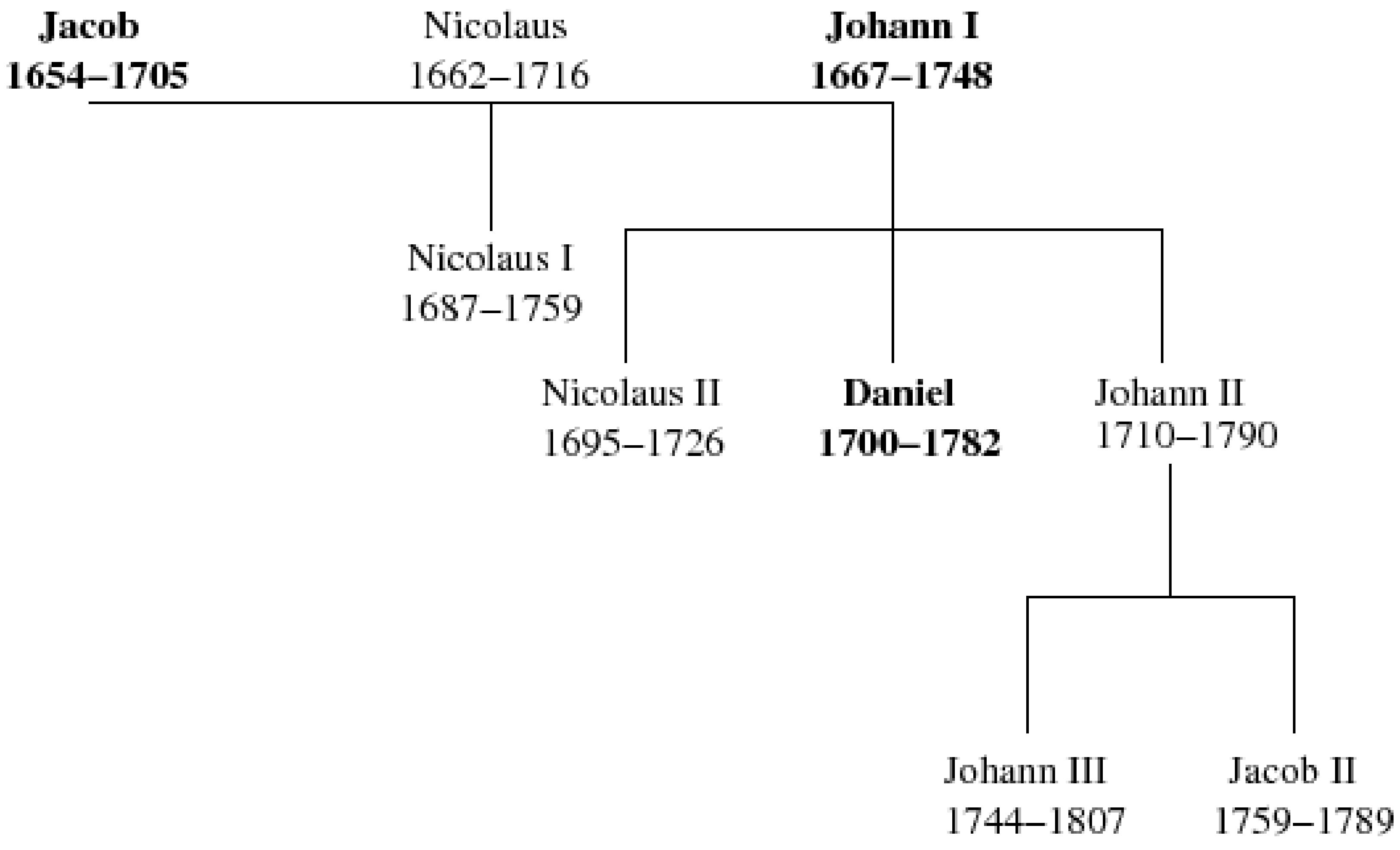
Jacob BERNOULLI (1654 – 1705) exprime les coefficients de ces polynômes comme produits d'éléments d'indices pairs de la (m + 1)-ième ligne du triangle de Pascal par les termes d'une suite, qu'on appelle après lui « nombres de Bernoulli »

Le triangle de Pascal

(début)



La dynastie Bernoulli

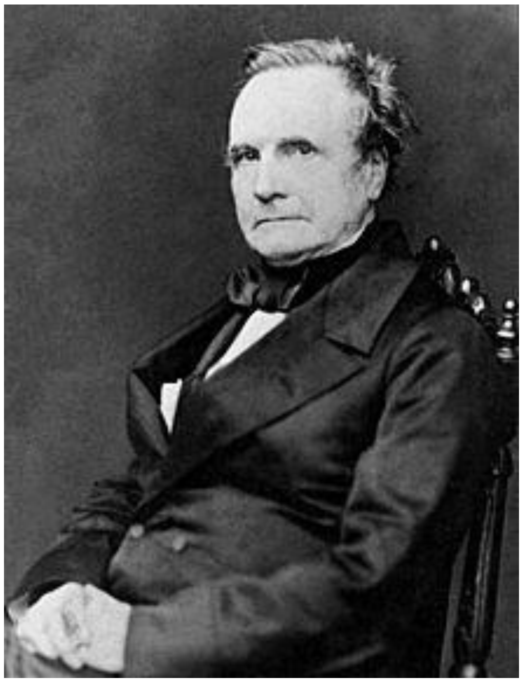


Les nombres de Bernoulli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

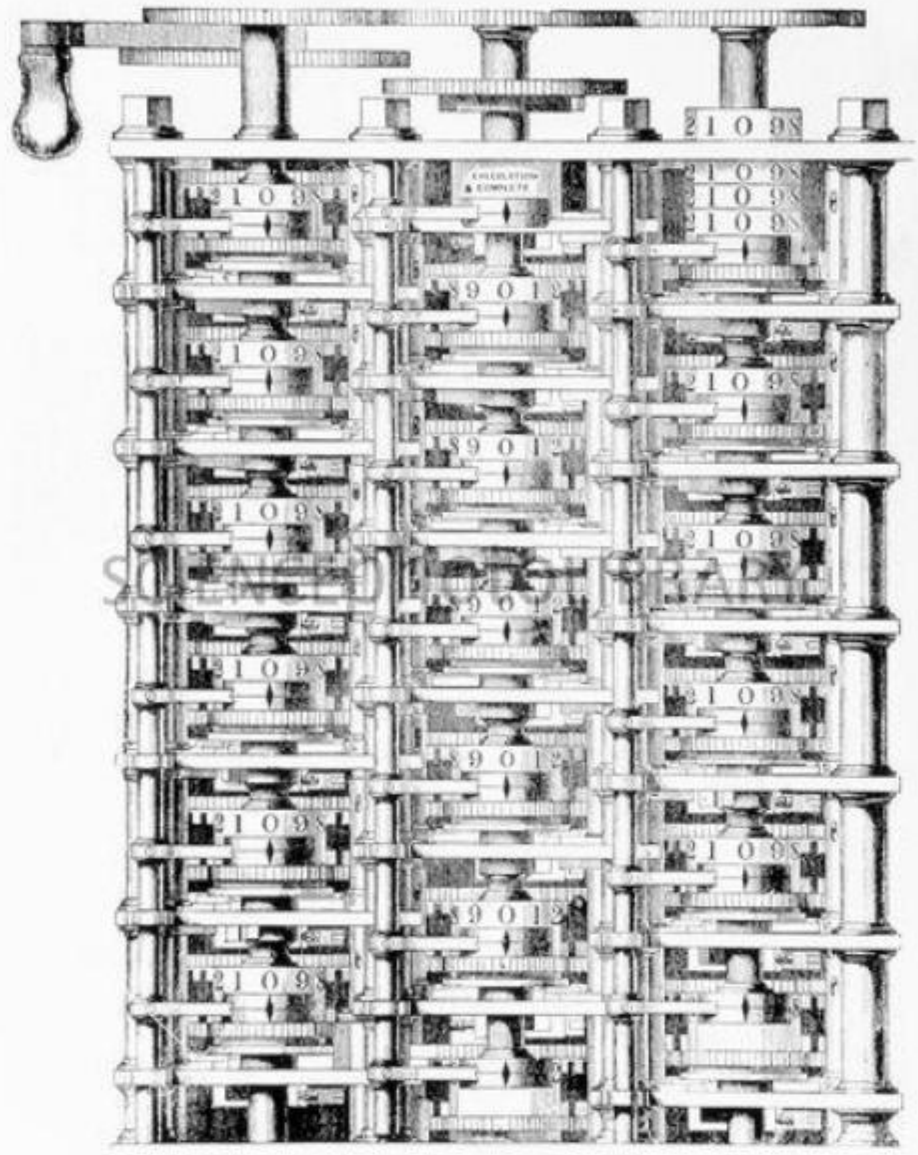
Etc.

Charles Babbage (1791 – 1871)



Mathématicien reconnu (Membre de la Royal society à 24 ans), ingénieur, astronome, statisticien, cryptanalyste, il a l'idée d'une *machine à différences* dont le projet est présenté en 1821, puis d'une *machine analytique* en 1934 (le projet en est présenté à Turin en 1840), puis d'une seconde *machine à différences* en 1847.

Ces machines n'ont connu qu'un petit début de réalisation – malgré l'octroi d'une subvention – pour la première, en raison de difficultés techniques qui auraient pu être dépassées, comme l'ont prouvé des réalisations récentes



B. H. Babbage, del.

Machine à différences (1)

Idée : $(X+1)^5 - X^5 = 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X + 1$

La différence entre les valeurs prises par une fonction polynôme de degré *n* en deux entiers consécutifs est un polynôme de degré *n* − 1, qui est donc *a priori* plus facile à calculer (C'est cette idée dont on s'est servi pour calculer les sommes de puissances)

Machine à différences (2)

x	x^3	Différence première	Différence seconde	Différence troisième
1	1			
2	8	7		
3	27	19	12	
4	64	37	18	6
5	125	61	24	6
6	216	91	30	6
7	343	127	36	6
8	512	169	42	6
9	729	217	48	6
10	1000	271	54	6

Plus de sommes, moins de produits

Deux trouvailles qui permettent de répondre à cette préoccupation :

Ruffini - Hörner (après Sharaf al-Din al-Tusi?) :

$$x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$$

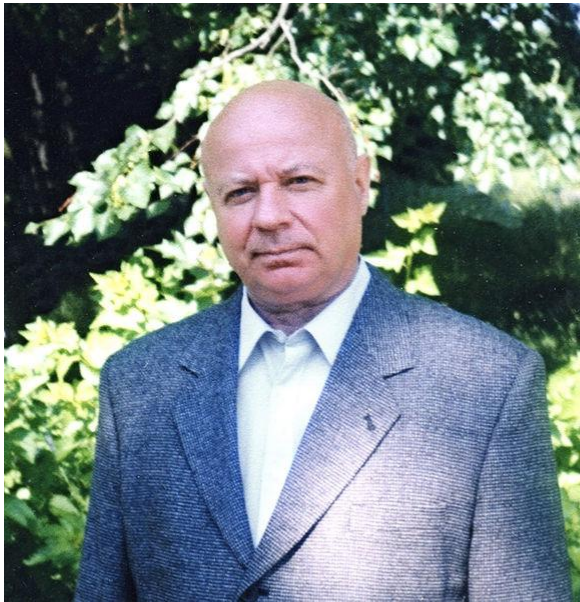
$$= \left(\left(\left(\left((x+2)x+3\right)x+4\right)x+5\right)x+6\right)x+7$$

Comptez les produits et les sommes : 10 et 6 contre 5 et 6

Plus de sommes, moins de produits

Anatoli Alexeievitch KARATSUBA (1960):

$$(10a + b)(10c + d)$$
$$= 100ac + 10\big((a - b)(d - c) + ac + bd\big) + bd$$



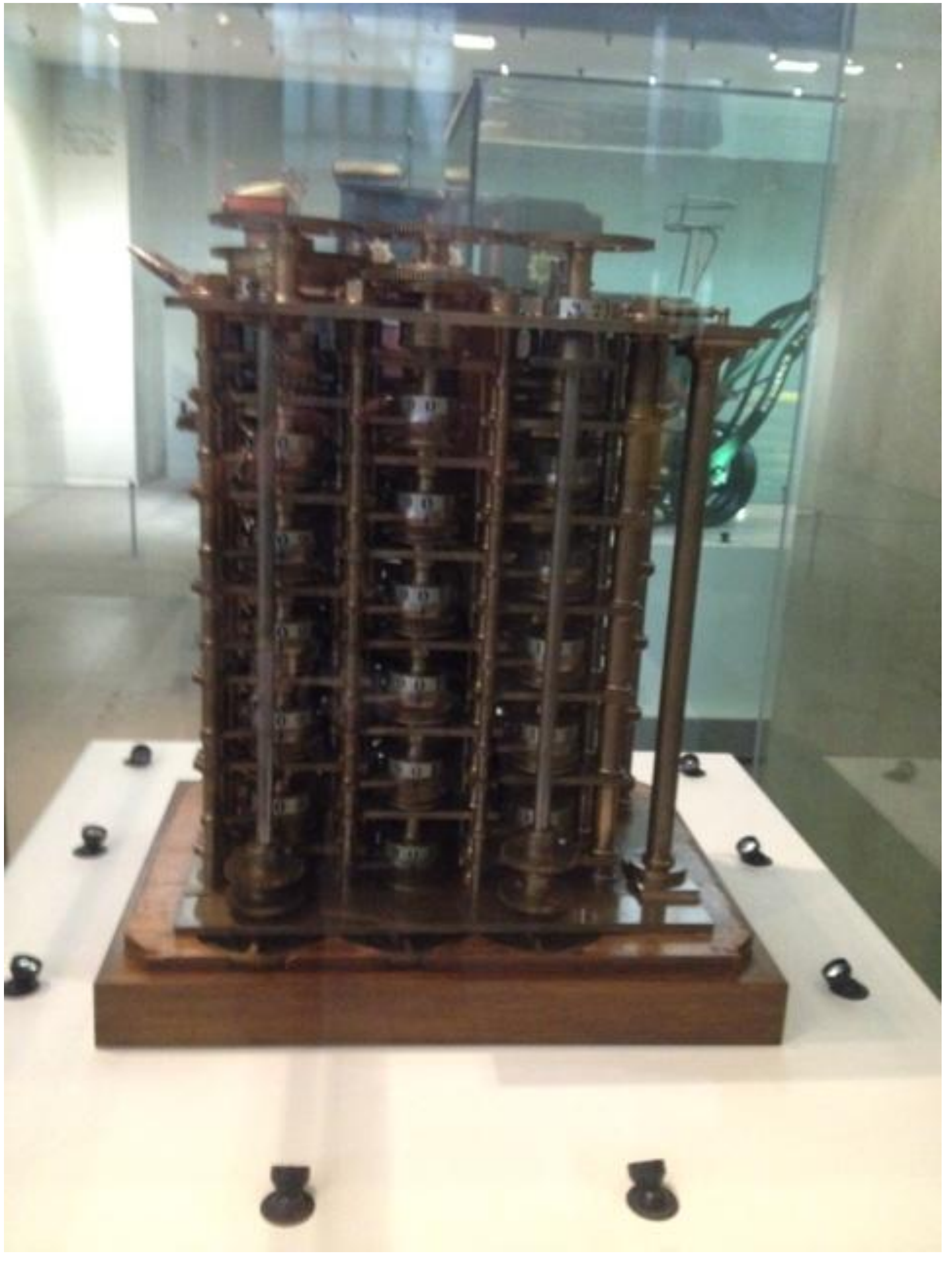
Babbage Menabrea Lovelace

- Un mot sur l'éducation d'Augusta Ada Byron
- Rencontre Charles Babbage ; mathématiques avec Augustus De Morgan
- Congrès de Turin (1840). Publication.

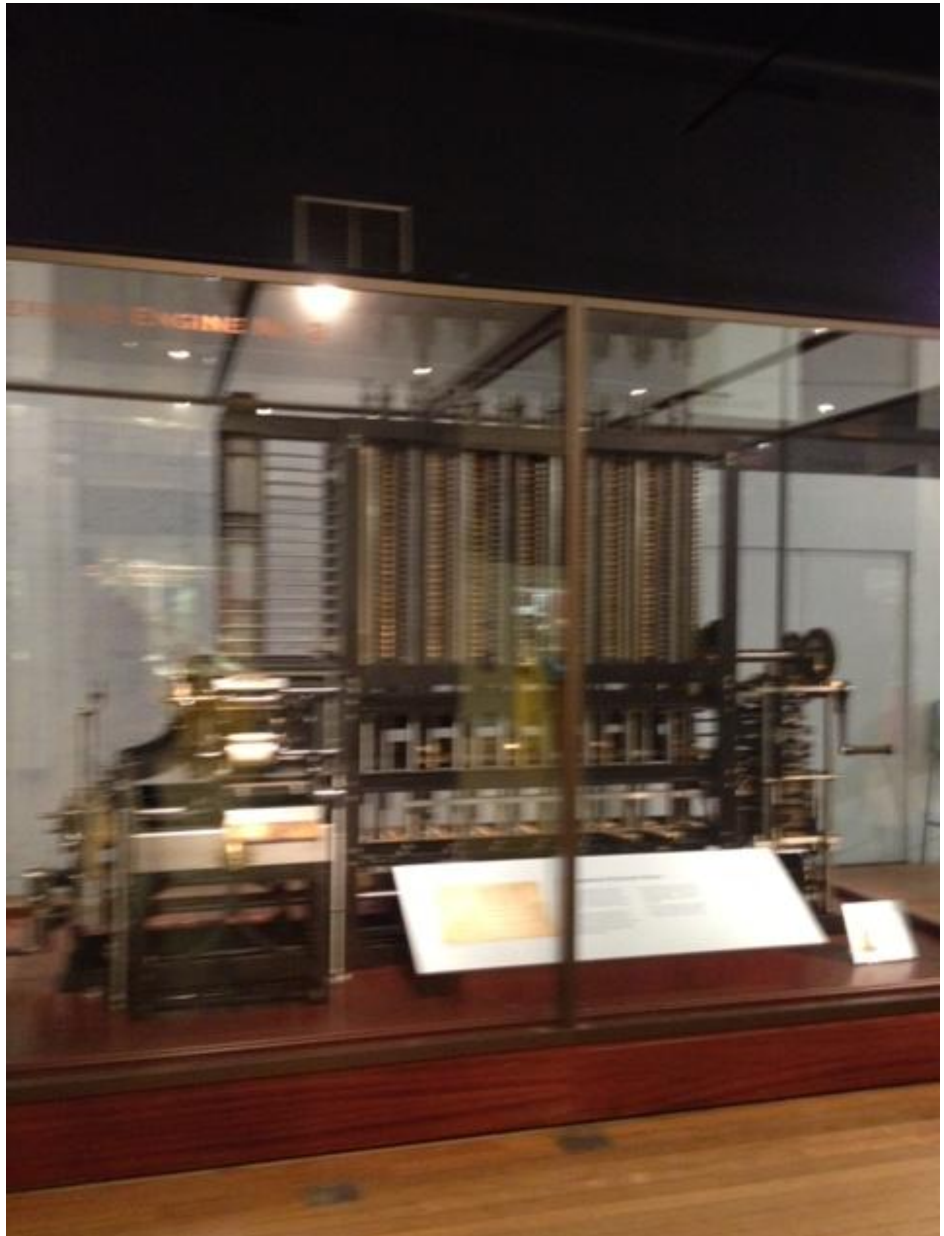
> NOTIONS SUR LA MACHINE ANALYTIQUE DE M. CHARLES BABBAGE, par Mr. L.-F. MENABREA, capitaine du génie militaire.

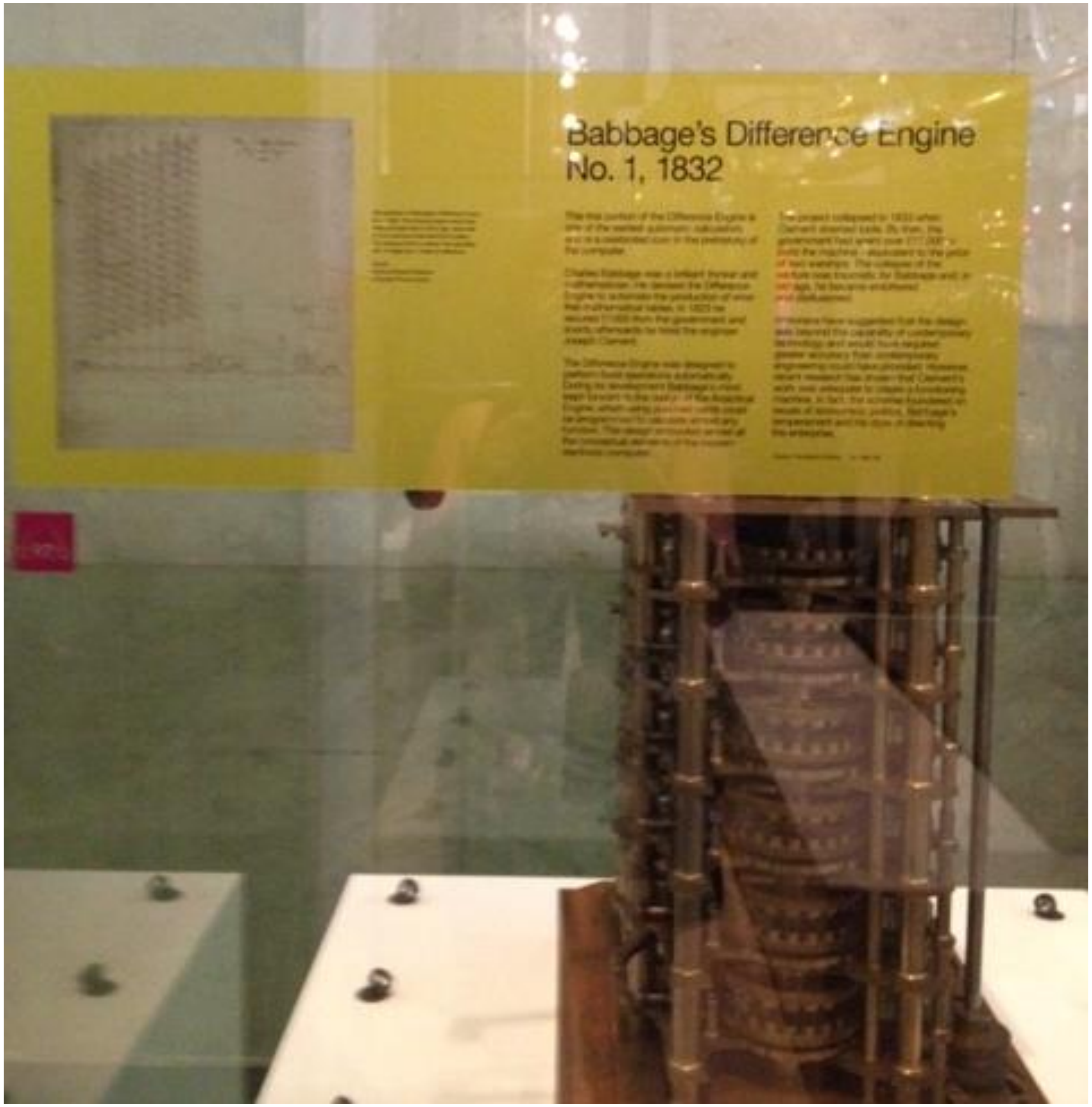
- Traduction par Ada Lovelace. Ses commentaires triplent le contenu originel.

Les diapositives suivantes présentent une partie du matériel exposé au Science museum de Londres




INGENIOUS
CHARLES BABBAGE: AN INGENIOUS INVENTOR




Babbage's Difference Engine
No. 1, 1832

Des algorithmes

Les diapositives suivantes présentent des tableaux d’organisation des calculs (résolution d’un système de deux équations linéaires à deux inconnues). Le second obtient le couple solution en utilisant seulement deux registres de plus que le premier qui ne fournit qu’une des deux projections du couple.

NOMBRE des OPÉRATIONS.	CARTONS des OPÉRATIONS. — Signes indiquant la nature des opérations.	CARTONS DES VARIABLES. Colonne soumise aux opérations.	Colonne recevant le résultat des opérations.	MARCHE des OPÉRATIONS.
1	$\times$	$V_2 \times V_4 =$	V_8	$= dn'$
2	$\times$	$V_5 \times V_1 =$	V_9	$= d'n$
3	$\times$	$V_4 \times V_0 =$	V_{10}	$= n'm$
4	$\times$	$V_1 \times V_3 =$	V_{11}	$= nm'$
5	$-$	$V_8 - V_9 =$	V_{12}	$= dn' - d'n$
6	$-$	$V_{10} - V_{11} =$	V_{13}	$= n'm - n'm'$
7	$:$	$\frac{V_{12}}{V_{13}} =$	V_{14}	$= x = \frac{dn' - d'n}{mn' - m'n}$

Colonnes sur lesquelles sont écrites les données primitives du problème.	Nombre des opérations.	CARTONS des opérations. Nombre des cartons des opérations	CARTONS des opérations. Signes indiquant la nature des opér.	CARTONS DES VARIABLES. COLONNES soumises aux opérations	CARTONS DES VARIABLES. Colonnes qui reçoivent le résultat des operations.	CARTONS DES VARIABLES. Indication des nouvelles colonnes sur lesquelles sont écrites les variables.	MARCHE des OPÉRATIONS.
$V_0 = m$	1	1	$\times$	$V_0 \times V_4 =$	$V_6 \ldots\ldots$	V_0 sur V_0 V_4 *id.* V_4	$V_6 = mn'$
$V_1 = n$	2	»	$\times$	$V_3 \times V_1 =$	$V_7 \ldots\ldots$	V_1 *id.* V_1 V_3 *id.* V_3	$V_7 = m'n$
$V_2 = d$	3	»	$\times$	$V_2 \times V_4 =$	$V_8 \ldots\ldots$	V_2 *id.* V_2 V_4 *id.* $\ldots\ldots$	$V_8 = dn'$
$V_3 = m'$	4	»	$\times$	$V_5 \times V_1 =$	$V_9 \ldots\ldots$	V_1 *id.* $\ldots\ldots$ V_5 *id.* V_5	$V_9 = d'n$
$V_4 = n'$	5	»	$\times$	$V_0 \times V_5 =$	$V_{10} \ldots\ldots$	V_0 *id.* $\ldots\ldots$ V_5 *id.* $\ldots\ldots$	$V_{10} = d'm$
$V_5 = d$	6	»	$\times$	$V_2 \times V_3 =$	$V_{11} \ldots\ldots$	V_2 *id.* $\ldots\ldots$ V_3 *id.* $\ldots\ldots$	$V_{11} = dm'$
	7	2	$-$	$V_0 \times V_7 =$	$V_{12} \ldots$	V_6 *id.* $\ldots\ldots$ V_7 *id.* $\ldots$	$V_{12} = mn' - m'n$
	8	»	$-$	$V_8 - V_9 =$	$V_{13} \ldots$	V_8 *id.* $\ldots\ldots$ V_9 *id.* $\ldots\ldots$	$V_{13} = dn' \cdot d'n$
	9	»	$-$	$V_{10} - V_{11} =$	$V_{14} \ldots$	V_{10} *id.* $\ldots\ldots$ V_{11} *id.* $\ldots\ldots$	$V_{14} = d'm - dm'$
	10	3	:	$\frac{V_{13}}{V_{12}} =$	$V_{15} \ldots$	V_{13} *id.* $\ldots\ldots$ V_{12} *id* V_{12}	$V_{15} = \frac{dn' - d'n}{mn' - m'n} = x$
	11	»	:	$\frac{V_{14}}{V_{12}} =$	$V_{16} \ldots$	V_{12} *id.* $\ldots\ldots$ V_{14} *id.* $\ldots\ldots$	$V_{16} = \frac{d'm - dm'}{mn' - m'n} = y$

Les commentaires d'Ada

La traduction anglaise de l'article de Menabrea est publiée en août 1843, avec des commentaires portant sur les conditions de programmation de la machine.

Ils sont divisés en 7 paragraphes. Le septième, la note G, donne un algorithme de calcul des nombres de Bernoulli.

Les commentaires sont d’Ada

Lettre de Babbage à Menabrea (1843)

My dear Sir,
I avail myself of the kindness of lady Murray to convey you a translation with notes of your admirable explanation of the analytical engine. You will probably have received the rough proofs I sent to Turin by my son and I am now at liberty to give you the name of your fair commentator : she is the countess of Lovelace, the only daughter of your great poet lord Byron.
Should you be in Turin during the short visit of lady Murray, you will do a great favor by pointing out to her the scenery most deserving attention in your beautiful country.
Accept, my dear Sir, the sincere expression of my esteem and regard. I am your, etc.
Charles Babbage,
1, Dorset street, Manchester-square,
London
28 August 1843

Sources

- Wikipedia
- Index des biographies (University of St Andrews)
- Bibnum pour le texte de Menabrea et le commentaire de François Reichenmann
- Site fourmilab.ch pour le « sketch » de Menabrea et les commentaires d’Ada
- Ada’s algorithm, livre de James Essinger