2015 : bicentenaire de la naissance d'Ada King, comtesse Lovelace, qui écrivit en 1843 le premier programme de calcul pour une machine

Lycée Jean-Baptiste Corot

Stage proposé aux élèves de seconde talentueux et motivés, désignés par leurs établissements, les 20 et 21 avril 2015

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril. Un stage de perfectionnement sur *Mathematica* a également été offert en janvier aux lauréats des Olympiades de première 2014.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge. Elle a reçu le soutien de l'Institut des hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui a accueilli le 11 avril une centaine de lycéennes et lycéens.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Un répondant minimum est attendu des élèves, sur lesquels les établissements veillent.
Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Catherine GUFFLET, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (IPR honoraire), Évelyne ROUDNEFF, Joffrey ZOLNET

Les responsables des établissements d'accueil : Jean-Luc VAYSSIÈRE (Président de l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines), Florence GOEHRS (Responsable administrative de l'UVSQ, campus des sciences), Jean-Paul JOUAN (Proviseur du lycée Camille Pissarro), Stéphane DU CREST (Proviseur du lycée Jean-Baptiste Corot)

Les professeurs : Fathi ABDELKARIM (Lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Elisabeth BRACHA (Lycée Jean-Baptiste Corot , SAVIGNY SUR ORGE) Jérôme CERISIER (Lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE), Antoine CROUZET (Lycée La Folie Saint James, NEUILY SUR SEINE), Thibault FOUCHÉ (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Isabelle DE GRACIA (Lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE), Odile DELASSUS (Lycée Alfred Kastler, CERGY), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Laurence GIGAN (Collège Les Nénuphars, BRÉVAL), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Philippe JULIEN (Lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Line ORRÉ (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE), Martine SALMON (Lycée Evariste Galois, SARTROUVILLE), Ernesto VIDAL (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christine WEILL (Lycée Hoche, VERSAILLES),

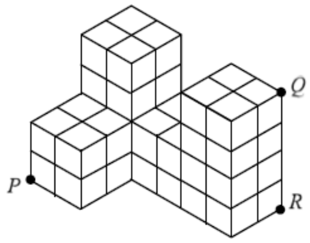
Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves

Programme du stage des 20 et 21 avril 2015

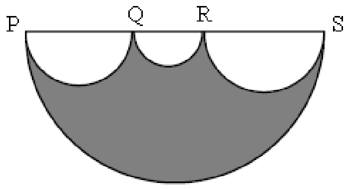
<table>
<tr><th colspan="7">Lundi 20 avril</th></tr>
<tr><th></th><th>Savigny sur Orge</th><th>Pontoise 1</th><th>Pontoise 2</th><th>Versailles 1</th><th>Versailles 2</th><th>Versailles 3</th></tr>
<tr><td>1O</td><td>Nombres
(NF)</td><td>Nombres
(EV)</td><td>Aire et volumes
(CH)</td><td>Aires et volumes
(MS+LG)</td><td>Dénombrement et probabilités
(PJ)</td><td>Nombres
(SM)</td></tr>
<tr><td>11.30</td><td>Fermat</td><td>Fermat</td><td>Fermat</td><td>Ada</td><td>Ada/Repas</td><td>Repas</td></tr>
<tr><td>12. 30</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td>Repas/Ada</td><td>Ada</td></tr>
<tr><td>13. 15
à
14.45</td><td>Angles et distances
(NF)</td><td>Cryptographie
(OD)</td><td>Nombres
(EV)</td><td>Nombres
(SM)</td><td>Aires et volumes
(MS+LG)</td><td>Dénombrement et probabilités
(PJ)</td></tr>
<tr><td>15
à
16.30</td><td>Fonctions et équations
(EB)</td><td>Aire et volumes
(CH)</td><td>Cryptographie
(OD)</td><td>Dénombrement et probabilités
(PJ)</td><td>Nombres
(SM)</td><td>Aires et volumes
(MS+LG)</td></tr>
<tr><th colspan="7">Mardi 21 avril</th></tr>
<tr><th></th><th>Savigny sur Orge</th><th>Pontoise 1</th><th>Pontoise 2</th><th>Versailles 1</th><th>Versailles 2</th><th>Versailles 3</th></tr>
<tr><td>1O</td><td>Dénombrement et probabilités
(FA)</td><td>Dénombrement et probabilité
(BB)</td><td>Equations et fonctions
(TF)</td><td>Cryptographie
(LO+PJ)</td><td>Angles et distances
(CW)</td><td>Equations et fonctions
(JC)</td></tr>
<tr><td>11.30</td><td rowspan="4">Ada
…..12.15……
Repas
……13.00…...
Aires et volumes (EB)
……14.30…...
Cryptographie
(IDG)</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td>Fermat</td><td>Fermat/Repas</td><td>Repas</td></tr>
<tr><td>12.30</td><td rowspan="3">Equations et fonctions
(TF)
……14.00…...
Angles et distances
(KR)
…….15.45......
Ada</td><td rowspan="3">Angles et distances
(KR)
………………
Dénombrement et probabilité
(BB)
………………
Ada</td><td>Repas</td><td>Repas/Fermat</td><td>Fermat</td></tr>
<tr><td>12.45
à
14.30</td><td>Equations et fonctions
(JC)</td><td>Cryptographie
(LO+PJ)</td><td>Angles et distances
(CW)</td></tr>
<tr><td>14.45
à
16.30</td><td>Angles et distances
(CW)</td><td>Equations et fonctions
(JC)</td><td>Cryptographie
(LO+PJ)</td></tr>
</table>

Géométrie I : Aires et volumes

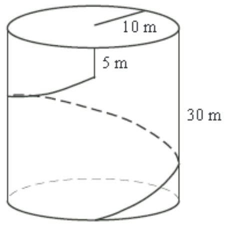
1. À la crèche Le solide ci-contre a été construit avec 48 cubes identiques ayant des arêtes de longueur $\sqrt{n}$, des faces entières des cubes étant collées les unes aux autres. Quelle est la plus petite valeur de *n* pour laquelle la distance de P à Q est un entier ?



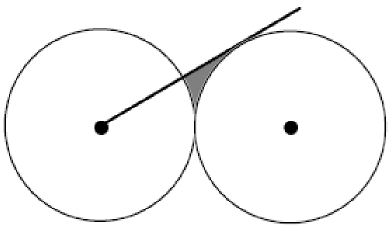
2. Batman carré On considère, sur un segment [PS] de longueur 4, deux points Q et R. Quatre demi-cercles sont tracés, comme sur la figure ci-contre, du même côté du segment [PS] en ayant pour diamètres respectifs [PS], [PQ], [QR] et [RS].
Quelle est l'aire d'un carré ayant le même périmètre que la région située à l'intérieur du grand demi-cercle et à l'extérieur des trois autres demi-cercles (région ombrée) ?



3. Le cylindre de révolution est développable Un château d'eau, ayant la forme d'un cylindre, a un rayon de 10 m et une hauteur de 30 m. Un escalier hélicoïdal, de pente constante, fait une fois le tour du château d'eau sur son extérieur. À l'extrémité de l'escalier, une échelle de 5 m monte jusqu'au haut du château d'eau.
Déterminer une valeur approchée au cm près de la longueur de l'escalier.

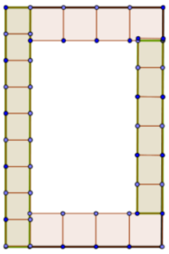


4. Tangente ET radiale On considère deux cercles, ayant chacun un rayon de 10 unités, sont tangents l'un à l'autre. Une droite, tangente à un des cercles, passe par le centre de l'autre cercle.
Quelle est l'aire de la région ombrée, à l'unité près?

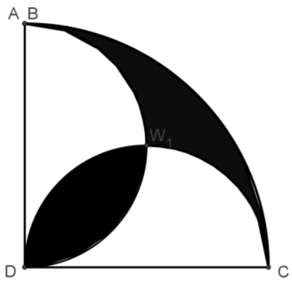


5. Partage Un cube ABCDEFGH (dans le nom ABCDEFGH, toute suite de deux lettres désigne les extrémités d'une arête) est découpé en quatre sections par deux plans
Le premier plan est parallèle à la face ABCD et passe par le milieu de l'arête [BG]. Le deuxième plan passe par les milieux des arêtes [AD], [HE] et [GH].
Quel est le rapport des volumes du plus petit et du plus grand des quatre morceaux ?

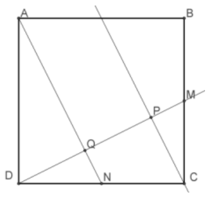
6. Patio La figure ci-contre représente un rectangle, dont le plus petit côté a pour mesure 8, entouré d'une bordure de carrés, de deux tailles différentes. Le plus grand côté du rectangle vaut 6 fois le côté des plus petits carrés. Déterminer les côtés des carrés et l'aire du rectangle.



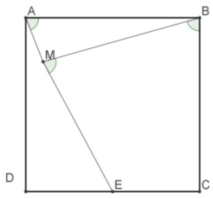
7. Champignon Dans la figure ci-contre, les deux demi-cercles ont pour diamètres deux côtés adjacents d'un carré, qui sont les rayons limitant un quart de cercle. Quelle est l'aire de la surface noire ?



Géométrie II : Angles et distances

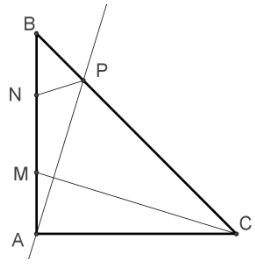


1. **Un carré dans un carré** On donne un carré ABCD et les milieux M et N des côtés [BC] et [CD]. La perpendiculaire à (DM) passant par C coupe (DM) en P. (AN) et (DM) se coupent en Q. On suppose que la longueur du segment [PM] eest 5. Quelle est l'aire du triangle APQ ?

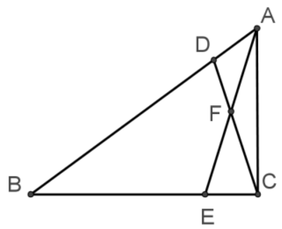


2. Encore un carré On donne un carré ABCD et le milieu E du côté [CD]. Un point M, intérieur au carré, est tel que les angles $\widehat{MAB}$, $\widehat{MBC}$ et $\widehat{BME}$ ont la même mesure. Quelle est cette mesure ?

3. Règle et compas On donne un segment de longueur *d*. Construire un carré de côté *a* de sorte que la différence entre la diagonale de ce carré et son côté *a* soit *d*.



4. Somme d'angles On considère un triangle ABC isocèle rectangle en A. Sur le côté [AB] on place deux points M et N tels que AM = BN. La perpendiculaire à (CM) passant par A coupe [BC] en P. Quelle est la somme des mesures des angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{BNP}$?



5. Sept d'un coup Sur l'hypoténuse [AB] du triangle ABC rectangle en C, on place le point D tel que BD = BC. Sur le côté [BC], on place le point E tel que la mesure de l'angle $\widehat{BAE}$ soit égale à 6 fois celle de $\widehat{CAE}$. Le segment [CD] coupe [AE] en son milieu F. Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?

6. Trapèze On considère un trapèze ABCD dont les bases sont [AB] et [CD] et dont les côtés non parallèles [BC] et [DA] vérifient BC = CD = DA. On place sur la base [AB] les points E et F tels que AE = EF = FB. Les droites (CF) et (DE) se coupent en P. Démontrer que les angles $\widehat{APB}$ et $\widehat{DAB}$ ont la même mesure.

7. Milieux… ou pas ? On considère un triangle scalène ABC (scalène signifie non isocèle) trois points D, E et F situés respectivement sur les côtés [CB], [CA] et [AB].
1. On suppose que les angles du triangle DEF sont égaux à ceux du triangle ABC (dans le même ordre). Peut-on en déduire que D, E et F sont les milieux des côtés du triangle ABC ?
2. On suppose vraies les trois égalités $\widehat{CED} = \widehat{BFD}$, $\widehat{CDE} = \widehat{EFA}$ et $\widehat{AEF} = \widehat{FDB}$. Peut-on en déduire que les point D, E et F sont les milieux des côtés du triangle ABC ?

Nombres entiers

1. Beaucoup d'inconnues Déterminer le plus petit entier *n* strictement positif tel que $\frac{2009}{2014}+\frac{2019}{n}=\frac{a}{b}$ où *a* est un multiple de 1004 et *b* un entier n'ayant avec *a* pas d'autre diviseur commun que 1.

2. Produit de facteurs On peut représenter le nombre 636 405 comme produit de trois entiers positifs de deux chiffres. Quels sont-ils ?

3. Le changement dans la continuité On construit des suites dont chaque terme est 0, 1 ou 2, de la manière suivante :
- On commence par 0 ;
- À chaque étape, la nouvelle suite est composée pour la première moitié des termes de la précédente. Pour la seconde moitié, on change les 0 en 1, les 1 en 2 et les 2 en 0.

On obtient ainsi les suites : 0, 01, 0112, 01121220, 0112122012202001, etc.
Quel chiffre occupe la millionième position ?

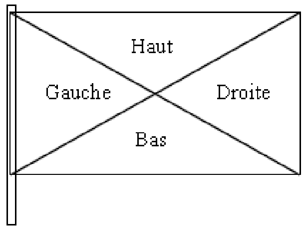
4. Une source de carrés Déterminer tous les entiers strictement positifs *n* tels que l'ensemble $1, 4, n$ ait la propriété suivante :
Si on choisit deux éléments distincts de cet ensemble et que l'on ajoute 2112 à leur produit, la réponse est le carré d'un entier.

5. Produit de 99 facteurs On pose, pour tout entier *n* : $f(n)=\frac{2n^2+n-1}{2n^2-n-1}$. Simplifier le produit $f(2)f(3)f(4)\ldots f(99)f(100)$.

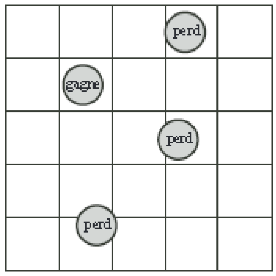
6. Polynôme inconnu *a.* Existe-t-il un polynôme *P* à coefficients entiers tel que $P(1)=7$ et $P(8)=9$?
b. Pour quelles valeurs de l'entier *n* existe-t-il un polynôme *P* à coefficients entiers tel que $P(1)=7$ et $P(8)=n$?

Dénombrement – Probabilités

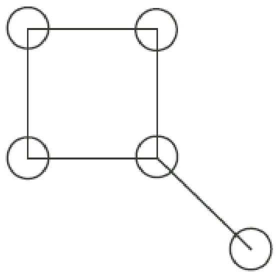
1. O.N.U. Dans la figure ci-contre, on a divisé un drapeau de forme rectangulaire en quatre triangles nommés Haut, Bas, Gauche et Droite. Chaque triangle sera peint en rouge, blanc, bleu, vert ou mauve de manière que deux triangles qui partagent un même côté soient de couleurs différentes. Combien de drapeaux différents peut-on former ?



2. Franc carreau Un disque ayant un diamètre de 8 cm est lancé sur un quadrillage 5 sur 5 dont les carreaux mesurent chacun 10 cm sur 10 cm. Le disque est dans une position gagnante si aucune partie du disque ne touche ou ne traverse une ligne du quadrillage. Autrement, il est dans une position perdante. On suppose que le disque tombe toujours au hasard et qu'aucune partie du disque ne tombe à l'extérieur du quadrillage. Quelle est la probabilité pour que le disque tombe en position gagnante ?

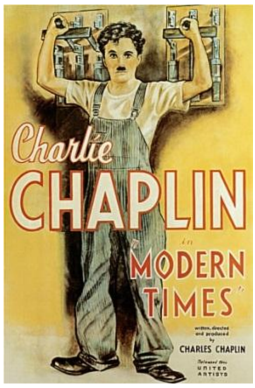


3. Coloriage Cinq cercles sont dessinés sur une feuille de papier et reliés comme dans la figure ci-contre. Chaque cercle doit être colorié en rouge, bleu ou vert. Deux cercles reliés par un segment de droite ne peuvent avoir la même couleur. Combien t a-t-il de façons différentes de colorier les cercles ?



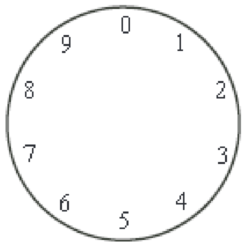
4. Suite GEB La suite GEB 1, 3, 7, 12 … est définie de manière à satisfaire aux trois conditions suivantes :
(i) la suite GEB est croissante (c.-à-d. que chaque terme est supérieur au terme précédent) ;
(ii) les différences entre toutes les paires de termes consécutifs forment une suite 2, 4, 5… qui est croissante ;
(iii) chaque entier qui ne parait pas dans la suite GEB parait exactement une fois dans la suite des différences décrite dans la partie (ii).
Quel est le 100^{e} terme de la suite GEB ?

5. Les temps modernes



Si on place l'entrée (*m*, *n*) dans la machine A, on obtient la sortie (*n*, *m*).
Si on place l'entrée (*m*, *n*) dans la machine B, on obtient la sortie $m+3n, n$.
Si on place l'entrée (*m*, *n*) dans la machine C, on obtient la sortie $m-2n, n$.
Nathalie choisit le couple (0, 1) et le place comme entrée dans une des machines. Elle prend ensuite la sortie et la place comme entrée dans n'importe laquelle des machines.
Elle continue de la sorte en prenant la sortie à chaque fois et en la plaçant comme entrée dans n'importe laquelle des machines. Par exemple, elle peut commencer par (0, 1) et utiliser successivement les machines B, B, A, C et B pour obtenir la sortie finale (7, 6). Certains couples ne peuvent pas être obtenus en commençant par le couple (0, 1) et en utilisant ces machines dans n'importe quel ordre n'importe quel nombre de fois. Parmi (2009,1016), (2009,1004), (2009,1002), (2009,1008), (2009,1032), lequel ?

6. Allez, roulez ! Stéphane place un jeton sur le 0 dans la figure ci-contre. À chaque étape, le jeton est déplacé dans le sens des aiguilles d'une montre. À la 1ère étape, le jeton est déplacé de 1 place, aboutissant sur le 1.
À la 2^{e} étape, le jeton est déplacé de 2^2 places, aboutissant sur le 5.
À la 3^{e} étape, le jeton est déplacé de 3^3 places, aboutissant sur le 2.
Stéphane continue de la sorte, le jeton étant déplacé de n^n places à la $n^{ème}$ étape.
Quelle sera la position du jeton après 1234 étapes ?



Équations - Fonctions

1. Feuille de route Un véhicule roule (on assimilera les vitesses moyennes à des vitesses constantes) à 60 km/h dans les montées, à 90 km/h dans les descentes, et à 72 km/h à l'horizontale.
Il effectue en 5 heures exactement le trajet de A à B et en 4 heures exactement le trajet de B à A.
Quelle est la distance entre A et B ?

2. Rallye Quatre automobiles, A, B, C et D roulent à des vitesses qu'on suppose constantes, sur la même route, A, B et C dans un sens, D dans l'autre sens.
A dépasse B à 8 heures et C à 9 heures. Elle croise D à 10 heures. D croise B à 12 heures et C à 14 heures.
À quelle heure B a-t-elle dépassé C ?

3. Des fractions de partie entière ? On rappelle que la fonction partie entière associe à tout réel x le nombre entier $[x]$, appelé « partie entière de x » et défini par $[x] \leq x < [x] + 1$.
Combien de valeurs différentes le nombre $x - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right]$ prend-il ?

4. Une condition nécessaire On considère le système d'équations $\begin{cases} x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases}$.

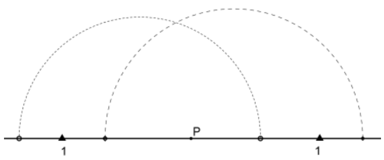
Déterminer les valeurs entières de *y* pour lesquelles il existe un entier *x* tel que le couple x, y soit solution du système.

5. Carré hiérarchique Chaque case du carré ci-contre doit contenir un et un seul des entiers compris entre 1 et 16. Certaines des cases ont déjà été remplies. On demande de le compléter, de sorte que les sommes des nombres contenus dans chacune des cases des 4 lignes, des 4 colonnes et des 2 diagonales constituent une suite de 10 nombres entiers consécutifs.

4	5	7	
6		3	
11	12	9	
10			

6. 1 sans 2 ou 2 sans 1 Une horloge digitale affiche en permanence 4 chiffres, de 00 : 00 à 23 : 59. Pendant quelle durée cumulée affiche-t-elle au moins un « 1 » et pas de « 2 » ou au moins un « 2 » et pas de « 1 ».

7. Sauts de puce Un point P est donné sur une droite. Les points de cette droite autres que P sont soumis à la transformation *f* définie ainsi :



L'image d'un point M situé à la distance *d* de P est le point M' situé à la distance 2*d* de P, sur la demi-droite d'origine P ne contenant pas M si *d* < 1, à la distance $\frac{1}{d}$ de P, sur la demi-droite d'origine P ne contenant pas M si *d* > 1.
On fait subir la transformation *f* à un point M de la droite, distinct de P, puis à l'image de M, puis à l'image de l'image de M, etc. Est-il possible que la sixième de ces images successives coïncide avec M ?

Cryptographie

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

A vous :

Déchiffrer le texte :

ADDNKHONBVOQFHSTZJ

Avec la clé aléatoire :

FDSFSDLFMKAEFOKDFF

A vous :

On choisit l'application affine

$$D : x \mapsto 3x + 1 \pmod{26}$$

Déchiffrer le texte :

HN HWZQQAN O NDG UBD BDVLNGAZXJN