

Thème statistiques, dénombrement et probabilités

Exercice 1 Moyenne flottante

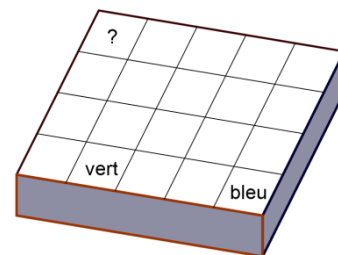
24 concurrents participent à une épreuve et obtiennent une note entière comprise entre 0 et 20. Trois d'entre eux ont obtenu exactement la moyenne du groupe. Si tous les concurrents dans la note est inférieure à cette moyenne avaient obtenu 4 points de plus, la moyenne aurait augmenté de 3 points. Combien de concurrents ont-ils obtenu une note supérieure ou égale à la moyenne du groupe ?

La moyenne M du groupe est le quotient de la somme S des notes par 24. Soit n le nombre de candidats ayant obtenu une note inférieure à M . L'énoncé s'écrit : $M + 3 = \frac{S+4n}{24}$. Comme $S = 24M$, cette équation s'écrit $n = 18$. 6 concurrents ont donc obtenu une note supérieure à la moyenne du groupe.

Exercice 2 À la crèche

Dans la boîte, il y a 20 cubes. Chaque cube a deux faces opposées peintes en rouge, deux faces opposées peintes en bleu et deux faces opposées peintes en vert. Lorsque deux cubes se retrouvent voisins dans la boîte, les faces accolées sont de la même couleur. On a indiqué la couleur de deux des faces vues lorsque tous les cubes sont rangés.

Quelle sont les couleurs possibles pour la face marquée d'un point d'interrogation ?

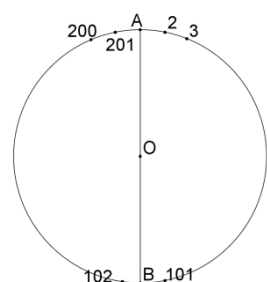


Sur la ligne du bas de la boîte, toutes les faces accolées sont de la même couleur. Elles ne sont ni vertes ni bleues, elles sont donc rouges.

Sur la deuxième colonne (celle qui contient le cube dont on voit la face verte), toutes les faces accolées sont bleues (en effet, elles ne sont ni rouges ni vertes). Sur la cinquième colonne, toutes les faces accolées sont vertes. Il s'ensuit que le voisin de droite du cube marqué d'un point d'interrogation a les faces avant et arrière bleues et que le cube situé sur la première ligne et la cinquième colonne a les faces avant et arrière vertes. Ses faces latérales sont rouges ou bleues. Les faces latérales du voisin de droite du cube « ? » sont donc rouges, comme les faces latérales du cube « ? ». Il reste donc deux possibilités : vert ou bleu.

Exercice 3 Où se cache O ?

Un polygone régulier à 201 côtés est inscrit dans un cercle de centre O. À chaque ensemble de trois sommets de ce polygone, on associe le triangle dont ils sont les sommets. À combien de ces triangles le point O est-il intérieur ?



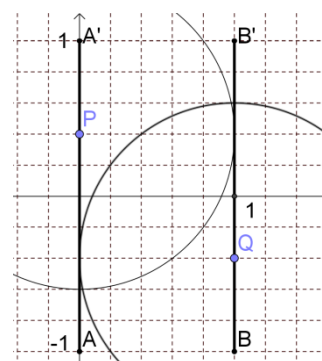
Numérotons les points de 1 à 201 (sur la figure, dans le sens des aiguilles d'une montre), et appelons A le point numéro 1. Le diamètre passant par A est la médiatrice du segment d'extrémités les points 101 et 102. Les sommets d'un triangle de sommet A contenant le point O ont des numéros l'un compris entre 2 et 101, l'autre compris entre 102 et 201. Le côté dont ils sont les extrémités coupe le diamètre [AB] en un point situé entre O et B. Cela laisse une possibilité pour le point 2, 2 possibilités pour le point 3, etc. 100 possibilités pour le point 101. Le nombre de triangles de sommet A répondant au problème est donc $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$

C'est-à-dire 5 050. Ce raisonnement peut être fait avec n'importe quel autre point de départ, ce qui donne $201 \times 5\,050 = 1\,015\,050$, mais chaque triangle est ainsi compté trois fois. Le nombre cherché est donc 338 350.

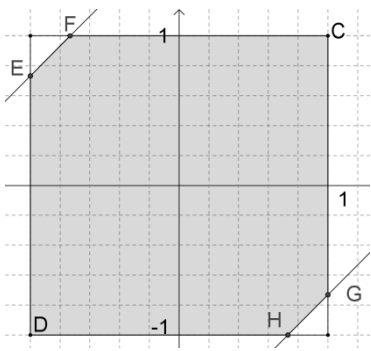
Exercice 4 Choc de cercles

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les segments [AA'] et [BB'] représentés sur la figure ci-contre. On choisit aléatoirement un point P du segment [AA'] et un point Q du segment [BB']. Quelle est la probabilité que le cercle de centre P de rayon 1 et le cercle de centre Q de rayon 1 soient sécants ?

Le point P a pour coordonnées 0 et x , le point Q a pour coordonnées 1 et y . Les cercles sont sécants si et seulement si la somme de leurs rayons est supérieure à



la distance de leurs centres. Une condition nécessaire et suffisante exprimant le problème est donc $\sqrt{(1-0)^2 + (y-x)^2} \leq 2$, ou encore $-\sqrt{3} \leq y-x \leq \sqrt{3}$. Représentons le domaine plan défini par



$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{3} \leq y-x \leq \sqrt{3} \end{cases} \text{ dans un repère orthonormé (qui n'a rien à voir avec le précédent...)}.$$

Le domaine des cas possibles est donc un carré de côté 2 et le domaine des cas favorables le polygone EFCGHD. La probabilité cherchée est donnée par $\frac{\text{aire du domaine des cas favorables}}{\text{aire du domaine des cas possibles}}$. Les deux triangles des coins sont rectangles isocèles et leur réunion est un carré de côté $2 - \sqrt{3}$. Son aire est donc $7 - 4\sqrt{3}$ et la probabilité cherchée $\frac{4\sqrt{3}-3}{4}$.

Exercice 5 100 balles

On a rempli un sac avec 111 balles de couleur (des bleues, des vertes, des rouges, des jaunes). On sait que si on tire 100 balles de ce sac, il est certain que les quatre couleurs seront présentes dans le tirage. Quel est le plus petit nombre de balles à tirer pour être sûr d'en avoir d'au moins trois couleurs ?

Si on tire 100 balles, les quatre couleurs sont représentées. Dans le cas le moins favorable, les 11 qui restent sont toutes de la même couleur. Cela signifie qu'il y a au moins 12 balles de chaque couleur dans le sac. Dans le cas le moins favorable, trois couleurs n'ont que 12 représentantes (et la quatrième 75). Il faut alors tirer $75 + 12 + 1$ balles au moins pour être sûr de tirer trois couleurs. Le nombre minimal de boules à tirer est donc 88.

Exercice 6 Ballon rond

Ali, Ben et Caro jouent un match à trois : à chaque mise en jeu, deux sont des joueurs de champ, qui s'opposent, et un est gardien de but. Celui qui marque devient gardien à la mise en jeu suivante.

Ali a été 12 fois joueur de champ, Ben l'a été 21 fois, et Caro a été 8 fois gardienne.

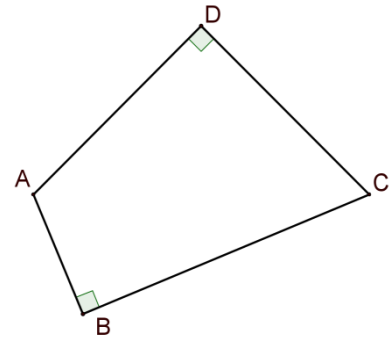
Qui a marqué le but lors de la sixième mise en jeu ?

Tandis que Ben était joueur de champ, Ali ou Caro gardaient le but. Ce fut 8 fois Caro, et donc 13 fois Ali. Ali a été 12 fois joueur de champ et 13 fois gardien. Il y a donc eu 25 mises en jeu. Comme Ali a été 13 fois gardien, il a gardé lors de la première, la troisième, la cinquième, etc., la vingt-cinquième mise en jeu. S'il a gardé la septième fois, c'est qu'il a marqué la sixième.

Thème aires et volumes

Exercice 1 Aire de famille

Le quadrilatère ci-contre possède deux angles droits, en B et D. Le triangle ADC est isocèle. Les segments [AB] et [BC] vérifient $AB + BC = 1$. Quelle est l'aire de ce quadrilatère ?



Si on note $AB = x$, on a $BC = 1 - x$, et $AC = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$. Comme [AC] est la diagonale d'un carré, on en déduit une expression de l'aire du quadrilatère (notée Ω) :

$$\Omega = \frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)$$

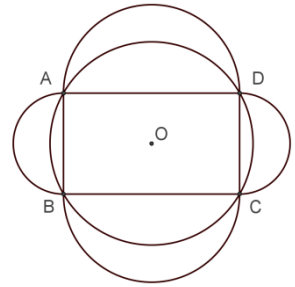
Donc $\Omega = \frac{1}{4}$. Tous les quadrilatères de ce type ont la même aire.

Exercice 2 Lunules tout azimut

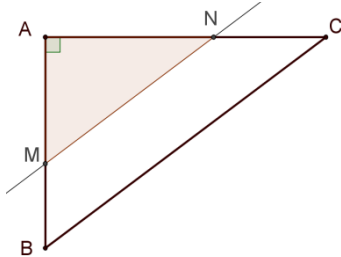
On considère un rectangle ABCD de centre O, son cercle circonscrit et les quatre demi-disques extérieurs au rectangle ayant pour diamètres ses côtés. Montrer que l'aire totale des lunules est égale à l'aire du rectangle.

(On connaît le même avec au départ le triangle rectangle ABC par exemple, c'est la situation des lunules d'Hippocrate de Chios).

Si on ajoute à l'aire totale des lunules l'aire du disque de centre O, on obtient la somme des aires des quatre demi-disques et du rectangle. Mais la somme des aires des quatre demi-disques est égale à l'aire du disque de centre O, d'après le théorème de Pythagore.



Exercice 3 Découpage



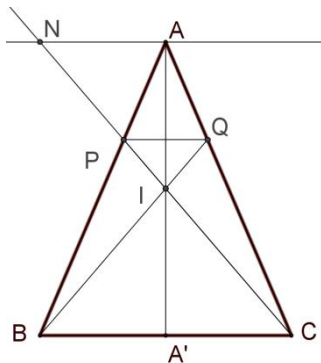
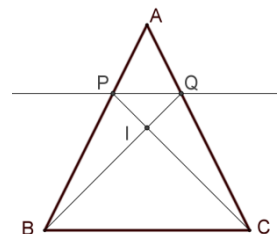
Les côtés de l'angle droit du triangle ABC mesurent, en cm, 12 et 9. On découpe une bande de largeur 3 dont un bord est l'hypoténuse du triangle. Quelle est l'aire du triangle restant ?

L'aire du triangle ABC peut être calculée de deux manières : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$ en utilisant le produit des longueurs des côtés de l'angle droit, $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times h \times 15$, où h est la longueur de la hauteur de ABC (15 étant la longueur de l'hypoténuse). Donc

$h = \frac{36}{5}$. Les triangles ANM et ACB sont en situation de Thalès. Le rapport de leurs aires est le carré du rapport de leurs hauteurs. Si on note \mathcal{A}' l'aire de AMN, on a $\mathcal{A}' = \left(\frac{h-3}{h}\right)^2 \mathcal{A}$. On trouve $\mathcal{A}' = \frac{147}{8}$

Exercice 4 L'aire d'en haut

On donne un triangle rectangle ABC de sommet principal A. On place sur les côtés [AB] et [AC] les points P et Q situés au tiers des segments [AB] et [AC] respectivement (tiers en partant de A). Les droites (BQ) et (CP) se coupent en I. Quel est le rapport de l'aire du quadrilatère APIQ à celle du triangle ABC ?



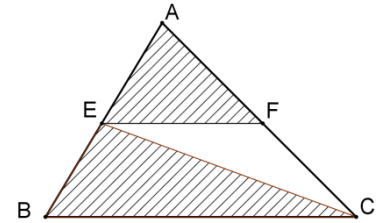
La droite (CP) coupe la parallèle à (BC) passant par A en N. Les triangles PNA et PCB sont en situation de Thalès, et

comme $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$, il s'ensuit que I est le milieu de la hauteur [AA'] du triangle ABC (les triangles AIN et A'IC sont en situation de Thalès, avec un rapport 1).

L'aire du triangle APQ est $\frac{1}{9}$ de l'aire de ABC. L'aire du triangle IBC est $\frac{1}{2}$ de l'aire de ABC (hauteur moitié, même « base »), et l'aire du triangle IPQ est $\frac{1}{9}$ de l'aire de IBC (situation de Thalès, rapport $\frac{1}{3}$). En conclusion, l'aire du quadrilatère APIQ est $\frac{1}{9} + \frac{1}{18}$, soit $\frac{1}{6}$ de l'aire de ABC ;

Exercice 5 Partage

Un domaine triangulaire ABC est partagé en trois par le segment [EF] parallèle au côté [BC] et le segment [EC]. La première part, le triangle AEF, et la seconde, le triangle EBC, ont la même aire. L'aire du triangle EFC est-elle inférieure ou supérieure à cette valeur commune ?



Appelons k le rapport de AE à AB. Le rapport de l'aire du triangle AEF au triangle ABC est alors k^2 . Mais l'aire de EBC peut aussi se calculer comme le demi-produit de la « base » BC par la hauteur de ce triangle, laquelle est le produit de la hauteur de ABC par $(1 - k)$.

Écrivons que les aires de AEF et EBC sont égales : $k^2 = 1 - k$

Cette égalité s'écrit aussi $\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$ ou encore $\left(k + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

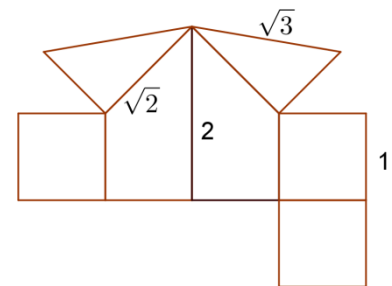
Comme k est positif, $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

L'aire du triangle EFC est donc $1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \sqrt{5} - 2$

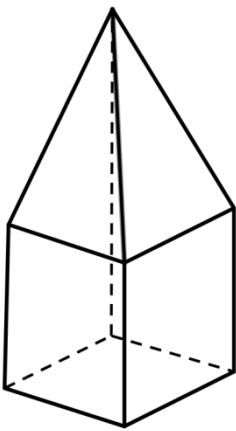
La comparaison montre que l'aire de EFC est plus petite que les deux autres.

Exercice 6 Bâtiment

Le patron représenté ci-contre est celui d'un bâtiment. Les carrés ont pour côté 1, les deux triangles rectangles ont pour côtés 1 et $\sqrt{2}$ (leur hypoténuse est donc $\sqrt{3}$). Représenter ce bâtiment en perspective. Quel est son volume ?



Le bâtiment a la forme d'un cube surmonté d'une pyramide à base carrée dont le sommet est à la verticale d'un des sommets du carré de base. Son volume est $\frac{4}{3}$



Thème fonctions et équations

1. Suite périodique

On considère la fonction définie sur l'ensemble des nombres rationnels distincts de 1 par $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

On souhaite étudier le comportement des images successives du nombre 8.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 1$. Comment modifier l'ensemble de départ de f pour que l'image de tout élément de cet ensemble ait aussi une image ?

2. On appelle x_1 l'image de 8 par f , x_2 l'image de x_1 , etc. Compléter le tableau suivant :

x	8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$f(x)$	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{7}{9}$	8					

3. Ce comportement périodique est-il propre au nombre 8 ?

L'équation $f(x) = 1$ a pour solution 0. Par ailleurs, 0 est l' de -1 par f . Il suffit donc d'éliminer 0 et -1 de l'ensemble de départ.

2. On voit que la suite a pour période 4

3. Pour tout x différent de 1 et de 0, $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $f(f(x)) = \frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{x}$

Pas besoin de calculer davantage pour savoir que x est l'image de l'image de $-\frac{1}{x}$

Exercice 2 Carrelage

Le sol d'une pièce rectangulaire est recouvert de dalles carrées parfaitement jointives. Les neuf dalles sont représentées ci-contre.

Le côté de la dalle noire est pris comme unité.

Quelles sont les dimensions de la pièce ?

Prenons pour inconnue x le côté de la dalle A. Le côté de B est donc $x + 1$, celui de D est $x - 1$ et celui de C est $x - 2$.

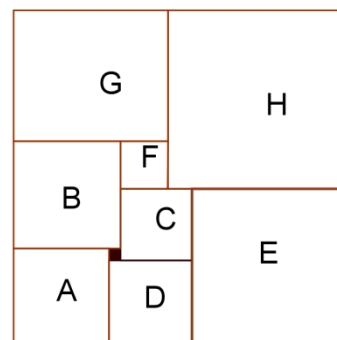
Il s'ensuit que le côté de la dalle E est $2x - 3$ et celui de F : $2x + 1 - (2x - 3) = 4$

Le côté de G est donc $x + 5$ et celui de H : $x + (x - 1) + (2x - 3) - (x + 5) = 3x - 9$.

On trouve aussi le côté de H en regardant les côtés de A, B, G et E : $x + (x + 1) + (x + 5) - (2x - 3) = x + 9$

On résout $3x - 9 = x + 9$, dont la solution est 9.

Les dimensions du rectangle sont donc 32 et 33.



Exercice 3 Éloge de la régularité (Olympiades 2016)

Pierre a construit un parcours de marche à pied de 15 km entre les points A et B. Ce parcours se divise en trois parties, chacune d'au moins 1 km : la première est une montée, la seconde est en terrain plat, la troisième est une descente.

L'objectif est de se conformer à un rythme de progression donné. Les marcheurs doivent parcourir les montées à la vitesse de 4 km/h, les descentes à 6 km/h, et marcher à 5 km/h en terrain plat. Dans ces conditions, le parcours de A vers B s'effectue en exactement 3 heures.

1. Clara a effectué le parcours, de B vers A. Elle a mis 3 heures. Prouver qu'elle a couru un moment.

2. Isabelle a effectué le parcours, elle aussi de B vers A. Elle a mis 3 heures et quart. Prouver qu'elle s'est arrêtée un moment.

Appelons m , p et d , respectivement, les distances à parcourir en montée, en terrain plat et en descente,

comptées dans le sens A vers B. L'énoncé donne deux relations : $m + p + d = 15$ et $\frac{m}{4} + \frac{p}{5} + \frac{d}{6} = 3$, qui peuvent

être traduites par
$$\begin{cases} m + p + d = 15 \\ 5m + 2p = 30 \end{cases} \quad (*)$$

Le temps mis « à la régulière » pour effectuer le parcours de B vers A s'exprime par $T = \frac{m}{6} + \frac{p}{5} + \frac{d}{4}$

Soit encore $60T = 10m + 12p + 15d$.

Les trois relations conduisent à $5(d - m) = 60T - 180$, ou encore $T = 3 + \frac{1}{12}(d - m)$

Les relations (*) conduisent à l'expression de m et d en fonction de p :

$$\begin{cases} m = 6 - \frac{2p}{5} \\ d = 9 - \frac{3p}{5} \end{cases}$$

Il s'ensuit que $d - m = 3 - \frac{p}{5}$ et donc que $T = 3 + \frac{1}{4} - \frac{p}{60}$

Sous cette dernière forme, on voit que :

1. Le temps « régulier » est supérieur à 3 heures (car $\frac{p}{60} < \frac{1}{4}$), donc Clara a forcé l'allure.
2. Le temps « régulier » est inférieur à 3 heures et quart, donc Isabelle a ralenti ou s'est arrêtée.

Exercice 4 Le bout du tunnel

Un camion, supposé rouler à vitesse constante, traverse un tunnel. Le passager mesure le temps écoulé entre l'instant où le camion entre dans le tunnel et celui où il en est complètement sorti. Le lendemain, le même camion est attelé d'une remorque qui porte sa longueur totale de 12 m à 24 m. Il traverse le même tunnel, en réduisant sa vitesse de 20% par rapport à la veille. Le passager constate que le temps écoulé est supérieur de 50% à celui mis la veille. Quelle est la longueur du tunnel ?

Appelons respectivement t , v et L le temps mis pour franchir le tunnel le premier jour, la vitesse supposée constante du camion le premier jour et la longueur du tunnel. Les données du problème se traduisent par les deux relations

$$\begin{cases} vt = L + 12 \\ 0,8v \times 1,5t = L + 24 \end{cases}$$

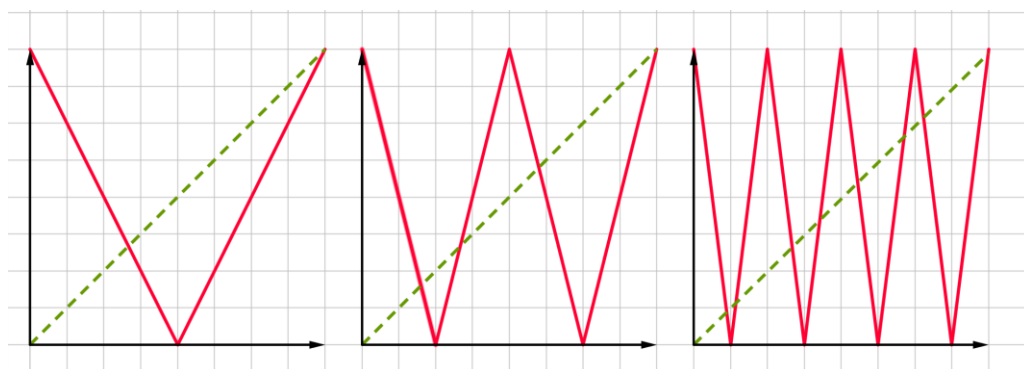
En soustrayant membre à membre, on obtient $0,2vt = 12$, donc $vt = 60$ et finalement $L = 48$

Exercice 5 Un peu de valeurs absolues

On considère le fonction f_0 définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f_0(x) = |1 - 2x|$. On rappelle que la valeur absolue d'un nombre x est le plus grand des nombres x et $-x$. Ainsi $|1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n par $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$.
Combien l'équation $f_{10}(x) = x$ a-t-elle de solutions ?

Une solution graphique semble la meilleure ! On peut étudier les représentations graphiques des fonctions f_0, f_1 et f_2 :
Reste à extrapoler.



Exercice 6 On aurait pu le mettre dans « Angles et distances »

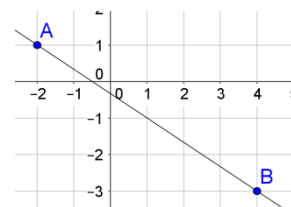
Trouver les réels x qui réalisent le minimum de la fonction S définie par $S(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$.

On peut écrire $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + (0 - 1)^2$
et $x^2 - 8x + 25 = (x - 4)^2 + (0 - 3)^2$

La somme S apparaît comme la somme des distances du point P de coordonnées x et 0 aux points A de coordonnées -2 et 1 et B de coordonnées 4 et -3 respectivement.

Cette somme est minimale si les points sont alignés, et P entre A et B .

La somme S est alors la distance de A à B , soit $2\sqrt{13}$

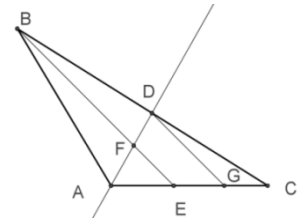


Thème angles et distances

Exercice 1 Thalès sans parallèles ?

La bissectrice de l'angle en A du triangle ABC coupe [BC] en D.

Il existe, sur le côté [AC] un point E tel que, si on appelle F le point d'intersection de (BE) et (AD), on a les rapports : $\frac{AF}{FD} = 3$ et $\frac{BF}{FE} = \frac{5}{3}$. Montrer que le triangle ABC est isocèle.



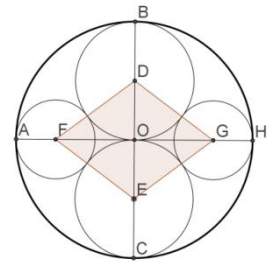
La parallèle à (BE) menée par D coupe [AC] en G. Les triangles AFE et ADG, d'une part, CGD et CEB sont en situation de Thalès, ce qui se traduit par les égalités :

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AF}{AD} = \frac{FE}{GD} = \frac{3}{4} \text{ d'une part, } \frac{CG}{CE} = \frac{CD}{CB} = \frac{DG}{EB} \text{ d'autre part. Mais } \frac{DG}{EB} = \frac{DG}{EF} \times \frac{EF}{EB} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

Et donc $\frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}$, D est le milieu de [BC] et le triangle ABC est isocèle.

Exercice 2 6, 5, 4, 3, 2

Le cercle Ω de centre O et de rayon 6 étant donné ainsi que son diamètre [BC], on place les deux cercles Σ passant par O et tangent en B à Ω et Σ' passant par O et tangent en C à Ω . Sur le diamètre [AH] perpendiculaire à (BC), on place les points F et G, centres de cercles tangents à Ω , Σ et Σ' . On note D et E les centres des cercles Σ et Σ' . Quelles sont les dimensions du losange EFDG ?



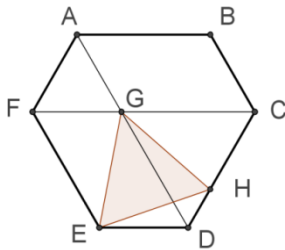
Dans le triangle ODF, rectangle en O, les côtés de l'angle droit mesurent 3 et $6 - r$ (r désigne le rayon du cercle de centre F), et l'hypoténuse mesure $3 + r$.

On a donc $(3 + r)^2 = 3^2 + (6 - r)^2$.

Cette égalité se réduit à $r = 2$

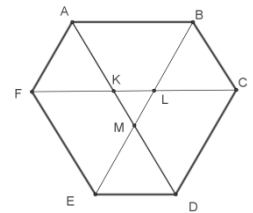
Les côtés du losange mesurent donc 5, ses demi-diagonales 3 et 4. Ce qui donne pour les angles (en valeur arrondie au centième de degré) 73,74 et 106,26.

Exercice 3 Hexagone



Dans l'hexagone ABCDEF, les côtés opposés sont parallèles, et de longueurs 2 ou 3 (alternativement en suivant l'ordre des points à partir de $AB = 3$). Les diagonales [AD] et [CF] se coupent en G. H est le point du segment [CD] tel que $DH = 1$. Montrer que le triangle EGH est équilatéral.

Commençons par prouver que tous les angles de l'hexagone ont la même mesure 120° . Pour cela, on montre que les diagonales [AD], [BE] et [CF] ont des supports parallèles aux côtés auxquels leurs extrémités n'appartiennent pas. On propose deux façons



de le faire. La première utilise les vecteurs :

$$\text{On a } \vec{FC} = \vec{FA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{FE} + \vec{ED} + \vec{DC} = \frac{3}{2} \vec{BC} + \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{3}{2} \vec{FA}.$$

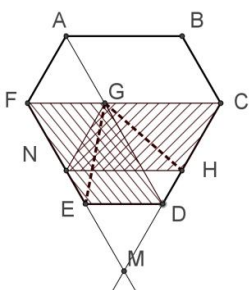
En comparant le 2^{ème} et le 4^{ème} membre, on a $\frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{FA}) = \frac{1}{3} \vec{AB}$ ou encore $\vec{BC} + \vec{FA} = \frac{2}{3} \vec{AB}$ et, en remplaçant dans la première égalité $\vec{FC} = \frac{5}{3} \vec{AB}$.

La seconde utilise des situations de Thalès :

Considérons les diagonales [AD], [BE] et [CF] et leurs points d'intersection deux à deux K, L et M. Les triangles KAF et KDC sont en situation de Thalès. Il en est de même de LBC et LEF puis de MED et MBA. Le rapport dans chaque situation est de 2 pour le premier cité à 3 pour le second. On en déduit que $\frac{KA}{KD} = \frac{MD}{MA} = \frac{2}{3}$, puis que $\frac{KM}{KD} = \frac{1}{2}$ (il y a un système

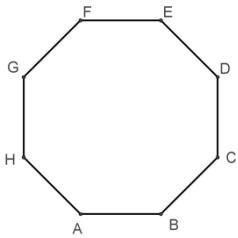
d'équations à résoudre). On a deux autres égalités avec L et M. On peut utiliser la réciproque du théorème de Thalès pour conclure que les droites (FC) et (AB) sont parallèles. Même chose pour les deux autres diagonales. Les angles en A, B, C, D et E des trapèzes isocèles sont de même mesure, 120° .

Observons que les deux diagonales [AD] et [FC] ont pour longueur 5 (on peut considérer le point M intersection de (CD) et (FE) : le triangle FCM est équilatéral et le triangle EDM aussi. EDN a pour côté 2, les côtés de FCM mesurent $2 + 3$) et que $GC = GD = 3$. Et $GA = GF = 2$.



La parallèle à (ED) menée par H coupe [FE] en N. Les segments [GH] et [GE] apparaissent comme des diagonales de parallélogrammes identiques (GCHN et GFED). Ils ont la même longueur. C'est une rotation d'angle 60° qui fait passer de l'un à l'autre, d'où le résultat.

Exercice 4 Octogone



L'octogone ABCDEFGH est régulier : ses angles sont tous de même mesure, ses côtés sont tous de même longueur, qu'on prendra comme unité.

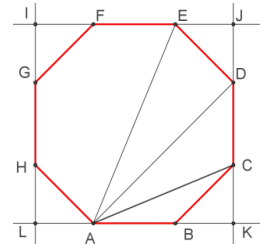
Quelles sont les longueurs de ses diagonales [AC], [AD] et [AE] ?

Les angles ont pour mesure commune $\frac{6 \times 180}{8} = 135^\circ$. Il s'ensuit que, par exemple, le triangle HLA est rectangle isocèle et que le quadrilatère IJKL dont les sommets sont les points d'intersection de (AB) et (EF) avec (CD) et (GH) est un carré. On a donc, par exemple, $LA = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans le triangle ABC, $AC^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + \sqrt{2}$. Donc $AC = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

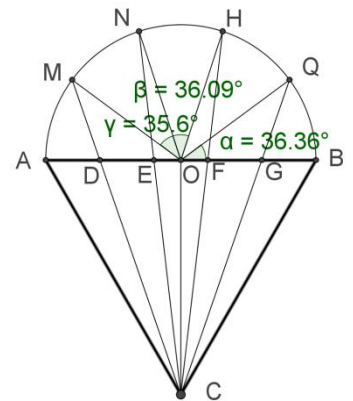
Dans le triangle AKD, rectangle isocèle en K, $AD = \sqrt{2} \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$

Enfin, le triangle ACE est rectangle isocèle en C, donc $AE = \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

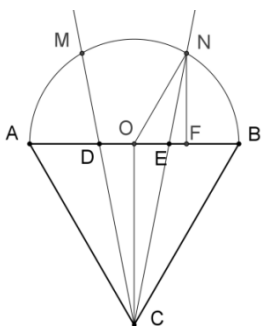


Exercice 5 Comme des architectes médiévaux

Dans son ouvrage « Histoire de géomètres et de géométrie », Jean-Louis Brahem rapporte un exemple de réalisation approchée du partage en 5 d'un demi-cercle (le fond d'une abside) : le diamètre [AB] est le côté d'un triangle équilatéral ABC. On partage [AB] en 5 en y plaçant les points D, E, F, G. Les demi-droites [CD), [CE), [CF) et [CG) coupent le demi-cercle de diamètre [AB] en M, N, P et Q respectivement. On a alors à peu près $AM = MN = NP = PQ = QB$. La figure ci-contre montre trois mesures d'angles voisines...



Prouver que cette construction est exacte lorsqu'il s'agit d'un partage en 3.

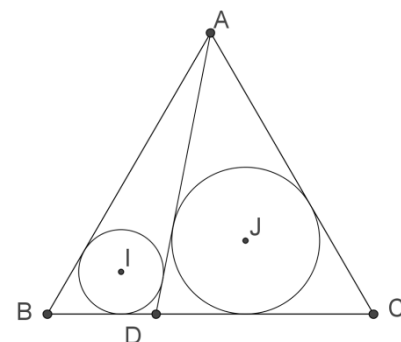


Prenons le problème à l'envers et supposons placés les points M et N sur le demi-cercle, de sorte que les triangles OBN, ONM et OMA sont équilatéraux. Il s'ensuit que les droites (ON) et (BC) sont parallèles et que les triangles EON et EBC sont en situation de Thalès. D'où l'égalité des rapports $\frac{ON}{BC} = \frac{OE}{EB}$. Si on prend comme unité le rayon du (demi) cercle, on obtient $\frac{OE}{EB} = \frac{1}{2}$, qui conduit à $EB = \frac{2}{3}$ C'est ce qu'on voulait.

Exercice 6 Produit de rayons

Sur le côté [BC] du triangle équilatéral ABC de côté 3, on place le point D tel que $BD = 1$. On appelle s le rayon du cercle inscrit dans le triangle ADC et r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABD. Quel est le produit rs ?

On rappelle que les bissectrices intérieures des angles d'un triangle sont concourantes en un point équidistant des côtés du triangle (dont cette propriété de concours prouve l'existence). Le cercle centré en ce point et tangent à un côté du triangle l'est aux trois. On l'appelle cercle inscrit dans le triangle.



Rappelons la relation entre l'aire S d'un triangle, son demi-périmètre p et le rayon R de son cercle inscrit : $S = \frac{1}{2}pR$ (les hauteurs des triangles dont un sommet est le centre du cercle inscrit et le côté opposé un côté du triangle sont identiques).

La longueur AD est donnée par $AD^2 = \frac{27}{4} + \frac{1}{4}$ Donc $AD = \sqrt{7}$.

Le périmètre de ADC est $5 + \sqrt{7}$ et celui de ABD est $4 + \sqrt{7}$

L'aire de ABC est $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ Celle de ABD est $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ et celle de ADC $\frac{6\sqrt{3}}{4}$

On a donc $s = \frac{6\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{5+\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}$ et $r = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{4+\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2(4+\sqrt{7})}$

Thème nombres

Exercice 1 Mise en jambes

Deux entiers positifs a et b vérifient : $90 < a + b < 99$ et $0,9 < \frac{a}{b} < 0,91$. Trouver a et b .

De $a > 0,9b$, on déduit $a + b > 1,9b$ et donc $99 > 1,9b$, et donc, comme b est un entier, $b \leq 52$.

De $a < 0,91b$, on déduit $a + b < 1,91b$ et donc $90 < 1,91b$, et comme b est un entier, $b \geq 48$

On a 4 situations à examiner :

b	$0,9b$	$0,91b$	a	$a + b$
48	43,2	43,68		
49	44,1	44,59		
50	$45 < a$	45,5		
51	45,9	46,41	46	97
52	46,8	47,32	47	

Exercice 2 Et mon tout est 98

Combien existe-t-il de suites croissantes d'au moins deux entiers naturels consécutifs dont la somme est 98 ?

La plus petite somme de p entiers consécutifs est $1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$. Ce nombre est supérieur à 98 dès que $p \geq 14$

Supposons que le premier terme d'une telle suite soit n et qu'elle soit composée des p termes :

$$n, n + 1, \dots, n + p - 1$$

La somme de ces p termes est $S = pn + 1 + 2 + 3 + \dots + p - 1$, soit $S = np + \frac{p(p-1)}{2}$

L'égalité $S = 98$ se traduit par $p(2n + p - 1) = 196$

Il s'ensuit que p est un diviseur de 196 inférieur ou égal à 13. Les possibilités sont 1, 2, 4 et 7. 1 est exclu, 2 conduit à une contradiction sur la parité de 98, 4 conduit à 23, 24, 25, 26 et 7 conduit à la suite : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. On a donc deux solutions.

Exercice 3 Permutations

a, b et c sont des nombres entiers positifs, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$ et $\frac{c+a}{b}$ sont des nombres entiers positifs. Quelles sont les valeurs possibles de $S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$?

Supposons, sans restreindre la généralité, que $a \leq b \leq c$. Il s'ensuit que $\frac{a+b}{c} \leq 2$ et que $\frac{b+c}{a} \geq 2$.

Comme $\frac{a+b}{c}$ est un entier positif, il n'y a que deux possibilités : $a + b = 2c$ ou $a + b = c$.

1. Si $a + b = c$

Comme $\frac{b+c}{a} = 2\frac{b}{a} + 1$ et $\frac{c+a}{b} = 2\frac{a}{b} + 1$, et que ces deux nombres sont entiers, il s'ensuit que $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont entiers, et donc égaux à 1. $a = b$.

La somme étudiée se réduit à $1 + 3 + 3 = 7$

2. Si $a + b = 2c$

Comme $\frac{c+a}{b} = \frac{3a+b}{2b}$ et que ce nombre est entier, la raisonnement initial conduit à $a = b$ ou $3a = b$.

i) Si $a = b$, alors $a = b = c$ et la somme étudiée est 6.

ii) Si $3a = b$, alors $2a = c$ et la somme étudiée est 8.

Exercice 4 L'origine de l'inégalité

Les nombres a, b, c, d et e sont tels que

$$a + b < c + d < e + a < b + c < d + e.$$

Quels sont le plus petit et le plus grand de ces nombres ?

De $a + b < b + c$ il vient $a < c$ et de $c + d < d + e$ il vient $c < e$. Donc $a < c < e$.

De $c + d < b + c$ il vient $d < b$ et de $e + a < d + e$ il vient $a < d$.

Enfin, de $a + b < e + a$, il vient $b < e$.

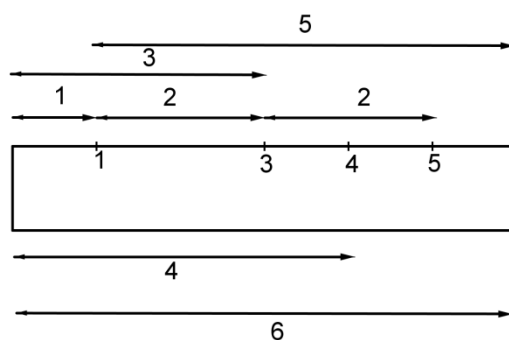
Finalement, on a deux chaînes : $a < c < e$ et $a < d < b < e$

Donc a est le plus petit, e le plus grand.

Exercice 5 Tout passe, tout s'efface (Olympiades 2016)

On dispose d'une règle graduée en cm dont la longueur, supérieure à 4 cm, est un nombre entier n de centimètres.

La figure ci-contre représente une règle de longueur 6 dont la graduation 2 a été effacée. Elle permet cependant de mesurer toutes les longueurs entières inférieures ou égales à 6. La longueur 2 est, par exemple, obtenue avec les graduations 1 et 3 ou avec les graduations 3 et 5.



On dit alors que la liste $(1, 3, 4, 5)$ est *opérationnelle*.

Plus généralement, on dira qu'une liste d'entiers compris entre 1 et $n - 1$ est *opérationnelle* pour une règle de longueur n si les écarts entre les extrémités de la règle ou les graduations marquées permettent de retrouver tous les entiers compris entre 1 et n .

1. On suppose que la longueur de la règle est égale à 6 cm.
 - a. Le triplet $(2, 3, 4)$ est-il opérationnel ?
 - b. Le couple $(1, 4)$ est-il opérationnel ?
2. Démontrer que pour une règle de 9 cm de longueur, il existe un triplet qui est opérationnel.
3. a. Combien d'écarts au maximum peut-on constituer à partir de p graduations et des extrémités d'une règle ?
 b. Démontrer, pour une règle de 11 cm, qu'il n'existe pas de triplet qui soit opérationnel.
4. On suppose que la règle a une longueur de 10 cm. On considère une liste de graduations opérationnelle dont $a \geq 1$ est le plus petit élément et $b \leq 9$ le plus grand.
 - a. Montrer que $a = 1$ ou $b = 9$.
 - b. On suppose que $a = 1$. Si la liste opérationnelle ne comporte que 3 entiers, montrer que $b = 8$.
 - c. En déduire qu'il n'existe pas de liste opérationnelle à trois termes.
 - d. Trouver une liste opérationnelle à quatre termes.

1. a. et b.

Distance	1	2	3	4	5	
$(2, 3, 4)$	$3 - 2$	2	3	4		Non opérationnelle
$(1, 4)$	1	$6 - 4$	$4 - 1$	4	$6 - 1$	Opérationnelle

2. Le triplet $(1, 4, 7)$ est opérationnel pour une règle de 9 cm

Distance	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	$9 - 7$	$7 - 4$	4	$9 - 4$	$7 - 1$	7	$9 - 1$

3. a. et b.

Considérons une règle sur laquelle sont marquées p graduations. Il y a $p + 1$ distances réalisables entre le bord gauche et une des graduations ou le bord droit, p distances réalisables entre la première graduation marquée à gauche et les autres ou le bord droit, etc. Le nombre total de distances réalisables est donc au maximum

$(p + 1) + p + \dots + 3 + 2 + 1$. Cette somme vaut $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$. Dans le cas où $p = 3$, elle vaut 10 (on n'a pas besoin de la formule...) et donc 3 graduations est un effectif insuffisant pour une suite opérationnelle.

4. a. Pour réaliser la distance 9, il est nécessaire d'utiliser un des bords de la règle, le gauche ($b = 9$) ou le droit ($a = 1$).

b. Si la liste contient 1 et 9, avec 8 on ne réalise que 1, 2, 7, 8 et 9, avec 7 on ne mesure que 1, 2, 3, 6, 8 et 9, avec 6 on ne mesure que 1, 3, 4, 5, 6, 8 et 9, avec 5 on ne mesure que 1, 4, 8 et 9. Le raisonnement s'achève par symétrie (remplacer 5 par 4, 6 par 3, etc.). Donc le plus grand terme d'une liste de trois n'est pas 9.

Si le plus grand terme n'est pas 8, alors la liste contient 2. Si elle contient 7, alors 4 n'est pas atteint. Si elle ne contient pas 7, alors elle contient 3, avec lequel on ne réalise que 1, 2, 3, 7, 8 et 9.

Donc le plus grand terme de la liste est 8.

c. Avec 1 et 8, on mesure 1, 7, 8 et 9. Si on ajoute 3, on ne peut pas mesurer 4. Si on ajoute 4, on ne peut pas mesurer 3. Si on ajoute 5, on ne peut pas mesurer 7, si on ajoute 7, on ne peut pas mesurer 5. Enfin, si on ajoute 6, on ne peut pas mesurer 3. Il n'existe pas de liste opérationnelle à trois termes.

d. La liste (1, 4, 6, 8) est opérationnelle pour une règle de 10 cm :

Distance	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	10 - 8	4 - 1	4	6 - 1	6	8 - 1	8	10 - 1

Exercice 6 Dés collés (Olympiades 2016)

On rappelle que sur un dé à jouer la somme des nombres inscrits sur deux faces opposées est égale à 7. Cette condition est réalisée dans ce problème.

1. a. On aligne deux dés en collant deux faces représentant le même nombre. On convient que toutes les faces non collées sont accessibles à la vue, quitte à tourner l'ensemble. Quelles sont les valeurs possibles de la somme S_2 des nombres apparaissant sur toutes les faces visibles (non collées entre elles) ?

b. On aligne trois dés de la même façon : en collant l'une contre l'autre des faces portant le même nombre. Montrer que la somme S_3 des nombres apparaissant sur toutes les faces visibles (non collées entre elles) ne dépend pas des nombres cachés.

2. Maintenant on aligne k dés, de la gauche vers la droite, toujours en collant deux faces représentant le même nombre, l'une contre l'autre. Soit n le premier nombre caché en commençant par la gauche.

a. Exprimer la somme des faces visibles des k dés, notée S_k , en fonction de n et de k . (On pourra distinguer deux cas en fonction de la parité de k).

b. Peut-on avoir $S_k = 2\,016$ pour un k bien choisi ?

c. Quelle est la prochaine année A pour laquelle on pourra avoir $S_k = A$ pour un k bien choisi ?

1. a. Le total des points marqués sur les faces d'un dé est 21. Pour deux dés, cela fait 42, mais on ne voit pas 2, 4, 6, 8, 10 ou 12. Le total des points visibles est donc 40, 38, 36, 34, 32 ou 30.

b. On colle deux faces portant le même nombre N pour les dés 1 et 2. Dans ce cas, la face à coller, sur le dé 2, porte le nombre $7 - N$. Du total 3×21 , on doit donc déduire $2N + 2(7 - N)$, c'est-à-dire 14. Le total des points marqués visibles est donc 49.

2. a. Si le nombre de dés est impair, $k = 2p + 1$, il y a $2p$ collages, qui dissimulent $14p$ points. La somme S_k est indépendante de n et vaut $S_k = 21k - 7(k - 1)$ ou encore $S_k = 14k + 7$

Si le nombre de dés est pair, $k = 2p$, il y a $2p - 1$ collages, le premier coûte $2n$, les autres $14(p - 1)$. On a alors : $S_k = 21k - 7(k - 2) - 2n$, ou encore $S_k = 14k + 14 - 2n$

b. Lorsque le nombre de dés est impair, la somme visible est impaire. 2 016 étant multiple de 14, il faudrait que $2n$ le soit aussi pour que la somme visible soit 2 016 avec un nombre de dés pair. Mais $2n$ prend les valeurs 2, 4, 6, 8, 10 et 12. La réponse est donc non.

c. Le plus petit entier supérieur à 2 016 dont le reste dans la division par 14 est 7 est 2 023. Le multiple de 14 qui suit 2 016 est 2 030, qui correspond à $k = 145$. Le plus grand « $2n$ » qu'on puisse lui ôter est 12. On trouve le millésime 2 018, inférieur à 2 023. C'est la réponse.