



Avril 2016 : centenaire de la naissance de Claude Elwood Shannon, père de la théorie mathématique de la communication (livre publié en 1948).



Lycée Jean-Baptiste Corot

## ***Stage proposé aux élèves de seconde talentueux et motivés, désignés par leurs établissements, les 18 et 19 avril 2016***

***« Tout doit s'organiser autour de ce dévoilement, de ce mystère résolu. Il faudrait absolument que la pédagogie soit centrée sur cet objectif : faire naître chez les enfants, les adolescents, et finalement chez tout le monde, le sentiment que ce qui est extraordinaire en mathématiques, c'est que, de façon parfois surprenante et imprévue, ont résout des énigmes dont l'énoncé est tout à fait clair et précis, mais qui cependant sont de vraies énigmes. »***

***Alain Badiou, Éloge des mathématiques, Flammarion 2015***

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge. Elle a reçu le soutien de l'Institut des hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui a accueilli le 2 avril soixante lycéennes et lycéens.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Un répondant minimum est attendu des élèves, sur lesquels les établissements veillent.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Catherine GUFFLET, Anne MENANT, Évelyne ROUDNEFF, Joffrey ZOLNET

**Les responsables des établissements d'accueil :** Jean-Luc VAYSSIÈRE (Président de l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines), Florence GOEHRS (Responsable administrative de l'UVSQ, campus des sciences), Jean-Paul JOUAN (Proviseur du lycée Camille Pissarro), Éric BISET (Proviseur du lycée Jean-Baptiste Corot)

**Les professeurs :** Fabienne ARGOUD, lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE, Bruno BAUDIN, lycée Camille Pissarro, PONTOISE, Jérôme CERISIER, lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE, Dominique CLENET, lycée François Villon, LES MUREAUX, Isabelle DE GRACIA, lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE, Christophe DEGUIL, lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE, Odile DELASSUS, lycée Alfred Kastler, CERGY, Annie DJENDEREDJIAN, lycée Paul Langevin, SURESNES, Nicolas FIXOT, lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE, Catherine HOUARD, lycée Camille Pissarro, PONTOISE, Philippe JULIEN, lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE, Sébastien MOULIN, lycée Jules Ferry, VERSAILLES, Étienne PEYROUX, lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE, Konrad RENARD, lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE, Germain ROUSSAS, lycée René Cassin, GONESSE, Martine SALMON, lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE

**Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves :** Pierre GAYRAUD (lycée Sainte Geneviève, ASNIERES SUR SEINE), Caroline MARAIS, Abdel KISSI et Malek AIT KACI (lycée Parc de Vilgénis, MASSY)

## Emploi du temps

Lundi 18 avril 2016

	Savigny sur Orge	Pontoise	Versailles 1	Versailles 2
10	Film Les mathématiques et la mode (E. Ghys)	Film Les mathématiques et la mode (E. Ghys)	Exposé : information et complexité	
11	Nombres EP	Nombres CH	Probabilités, dénombrement PJ	Angles et distances DC
12. 45	Repas	Repas	Repas	Repas
13. 20 à 15.05	Angles et distances NF	Cryptographie OD	Angles et distances DC	Fonctions et équations AD
15.15 à 17	Fonctions et équations NF	Aire et volumes KR GR	Fonctions et équations AD	Probabilités, dénombrement PJ

Mardi 19 avril 2016

	Savigny sur Orge	Pontoise	Versailles 1	Versailles 2
10	Probabilités, dénombrement FA	Probabilités, dénombrement BB	Cryptographie CD	Nombres JC
11.45	Repas	Repas	Repas	Repas
12.20	Exposé information et complexité	Angles et distances OD	Film : Les mathématiques et la mode (E. Ghys)	
13.20 à 15.05	Aires et volumes FA		Aires et volumes SM	Cryptographie CD
15.10 à 17	Cryptographie IDG		Exposé information et complexité	Nombres JC

L'horaire mardi après-midi à Pontoise est 12.20 – 14.05 – 16

## Thème statistiques, dénombrement et probabilités

### Exercice 1 Moyenne flottante

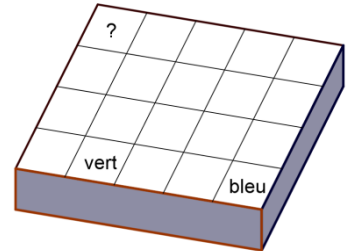
24 concurrents participent à une épreuve et obtiennent une note entière comprise entre 0 et 20. Trois d'entre eux ont obtenu exactement la moyenne du groupe. Si tous les concurrents dans la note est inférieure à cette moyenne avaient obtenu 4 points de plus, la moyenne aurait augmenté de 3 points.

Combien de concurrents ont-ils obtenu une note supérieure ou égale à la moyenne du groupe ?

### Exercice 2 À la crèche

Dans la boîte, il y a 20 cubes. Chaque cube a deux faces opposées peintes en rouge, deux faces opposées peintes en bleu et deux faces opposées peintes en vert. Lorsque deux cubes se retrouvent voisins dans la boîte, les faces accolées sont de la même couleur. On a indiqué la couleur de deux des faces vues lorsque tous les cubes sont rangés.

Quelle sont les couleurs possibles pour la face marquée d'un point d'interrogation ?

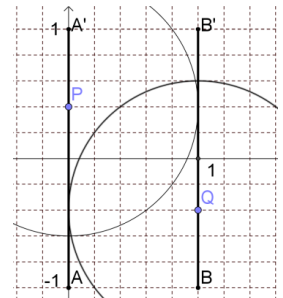


### Exercice 3 Où se cache O ?

Un polygone régulier à 201 côtés est inscrit dans un cercle de centre O. À chaque ensemble de trois sommets de ce polygone, on associe le triangle dont ils sont les sommets. À combien de ces triangles le point O est-il intérieur ?

### Exercice 4 Choc de cercles

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les segments  $[AA']$  et  $[BB']$  représentés sur la figure ci-contre. On choisit aléatoirement un point P du segment  $[AA']$  et un point Q du segment  $[BB']$ . Quelle est la probabilité que le cercle de centre P de rayon 1 et le cercle de centre Q de rayon 1 soient sécants ?



### Exercice 5 100 balles

On a rempli un sac avec 111 balles de couleur (des bleues, des vertes, des rouges, des jaunes). On sait que si on tire 100 balles de ce sac, il est certain que les quatre couleurs seront présentes dans le tirage. Quel est le plus petit nombre de balles à tirer pour être sûr d'en avoir d'au moins trois couleurs ?

### Exercice 6 Ballon rond

Ali, Ben et Caro jouent un match à trois : à chaque mise en jeu, deux sont des joueurs de champ, qui s'opposent, et un est gardien de but. Celui qui marque devient gardien à la mise en jeu suivante.

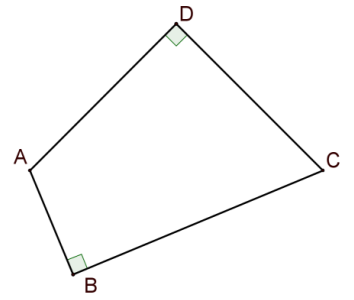
Ali a été 12 fois joueur de champ, Ben l'a été 21 fois, et Caro a été 8 fois gardienne.

Qui a marqué le but lors de la sixième mise en jeu ?

## Thème aires et volumes

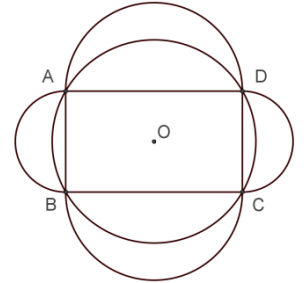
### Exercice 1 Aire de famille

Le quadrilatère ci-contre possède deux angles droits, en B et D. Le triangle ADC est isocèle. Les segments [AB] et [BC] vérifient  $AB + BC = 1$ . Quelle est l'aire de ce quadrilatère ?

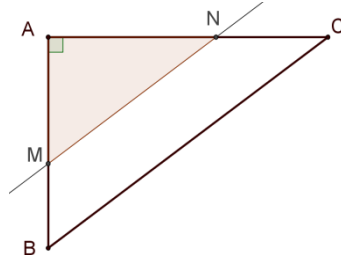


### Exercice 2 Lunules tout azimuth

On considère un rectangle ABCD de centre O, son cercle circonscrit et les quatre demi-disques extérieurs au rectangle ayant pour diamètres ses côtés. Montrer que l'aire totale des lunules est égale à l'aire du rectangle.



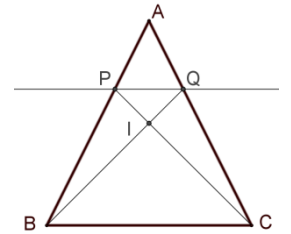
### Exercice 3 Découpage



Les côtés de l'angle droit du triangle ABC mesurent, en cm, 12 et 9. On découpe une bande de largeur 3 dont un bord est l'hypoténuse du triangle. Quelle est l'aire du triangle restant ?

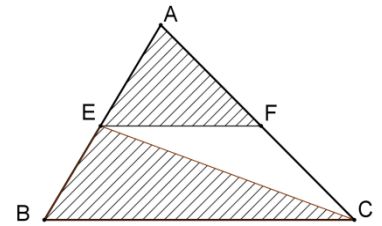
### Exercice 4 L'aire d'en haut

On donne un triangle isocèle ABC de sommet principal A. On place sur les côtés [AB] et [AC] les points P et Q situés au tiers des segments [AB] et [AC] respectivement (tiers en partant de A). Les droites (BQ) et (CP) se coupent en I. Quel est le rapport de l'aire du quadrilatère APIQ à celle du triangle ABC ?



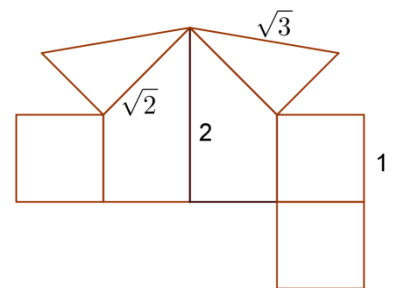
### Exercice 5 Partage

Un domaine triangulaire ABC est partagé en trois par le segment [EF] parallèle au côté [BC] et le segment [EC]. La première part, le triangle AEF, et la seconde, le triangle EBC, ont la même aire. L'aire du triangle EFC est-elle inférieure ou supérieure à cette valeur commune ?



### Exercice 6 Bâtiment

Le patron représenté ci-contre est celui d'un bâtiment. Les carrés ont pour côté 1, les deux triangles rectangles ont pour côtés 1 et  $\sqrt{2}$  (leur hypoténuse est donc  $\sqrt{3}$ ). Représenter ce bâtiment en perspective. Quel est son volume ?



## *Thème fonctions et équations*

### 1. Suite périodique

On considère la fonction définie sur l'ensemble des nombres rationnels distincts de 1 par  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ .

On souhaite étudier le comportement des images successives du nombre 8.

1. Résoudre l'équation  $f(x) = 1$ . Comment modifier l'ensemble de départ de  $f$  pour que l'image de tout élément de cet ensemble ait aussi une image ?

2. On appelle  $x_1$  l'image de 8 par  $f$ ,  $x_2$  l'image de  $x_1$ , etc. Compléter le tableau suivant :

$x$	8	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$f(x)$	$-\frac{9}{7}$								

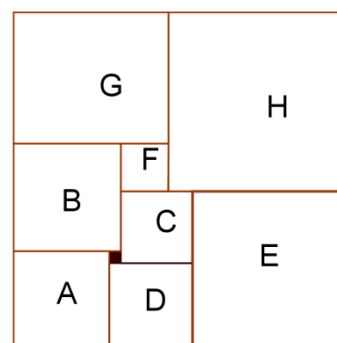
3. Ce comportement périodique est-il propre au nombre 8 ?

### Exercice 2 Carrelage

Le sol d'une pièce rectangulaire est recouvert de dalles carrées parfaitement jointives. Les neuf dalles sont représentées ci-contre.

Le côté de la dalle noire est pris comme unité.

Quelles sont les dimensions de la pièce ?



### Exercice 3 Éloge de la régularité (Olympiades 2016)

Pierre a construit un parcours de marche à pied de 15 km entre les points  $A$  et  $B$ . Ce parcours se divise en trois parties, chacune d'au moins 1 km : la première est une montée, la seconde est en terrain plat, la troisième est une descente.

L'objectif est de se conformer à un rythme de progression donné. Les marcheurs doivent parcourir les montées à la vitesse de 4 km/h, les descentes à 6 km/h, et marcher à 5 km/h en terrain plat. Dans ces conditions, le parcours de  $A$  vers  $B$  s'effectue en exactement 3 heures.

1. Clara a effectué le parcours, de  $B$  vers  $A$ . Elle a mis 3 heures. Prouver qu'elle a couru un moment.

2. Isabelle a effectué le parcours, elle aussi de  $B$  vers  $A$ . Elle a mis 3 heures et quart. Prouver qu'elle s'est arrêtée un moment.

### Exercice 4 Le bout du tunnel

Un camion, supposé rouler à vitesse constante, traverse un tunnel. Le passager mesure le temps écoulé entre l'instant où le camion entre dans le tunnel et celui où il en est complètement sorti. Le lendemain, le même camion est attelé d'une remorque qui porte sa longueur totale de 12 m à 24 m. Il traverse le même tunnel, en réduisant sa vitesse de 20% par rapport à la veille. Le passager constate que le temps écoulé est supérieur de 50% à celui mis la veille.

Quelle est la longueur du tunnel ?

### Exercice 5 Un peu de valeurs absolues

On considère le fonction  $f_0$  définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  par  $f_0(x) = |1 - 2x|$ . On rappelle que la valeur absolue

d'un nombre  $x$  est le plus grand des nombres  $x$  et  $-x$ . Ainsi  $|1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la fonction  $f_n$  par  $f_n(x) = f_0(f(x))$ .

Combien l'équation  $f_{10}(x) = x$  a-t-elle de solutions ?

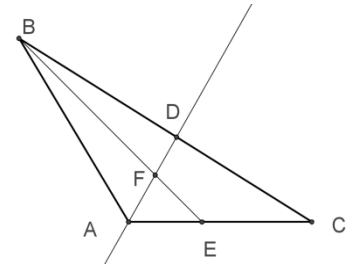
### Exercice 6 On aurait pu le mettre dans « Angles et distances »

Trouver les réels  $x$  qui réalisent le minimum de la fonction  $S$  définie par  $S(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$ .

## Thème angles et distances

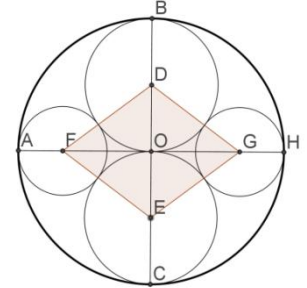
### Exercice 1 Thalès sans parallèles ?

La bissectrice de l'angle en B du triangle ABC coupe [AC] en D.  
Il existe, sur le côté [BC] un point E tel que, si on appelle F le point d'intersection de (AE) et (BD), on a les rapports :  $\frac{AF}{FD} = 3$  et  $\frac{BF}{FE} = \frac{5}{3}$ . Montrer que le triangle ABC est isocèle.



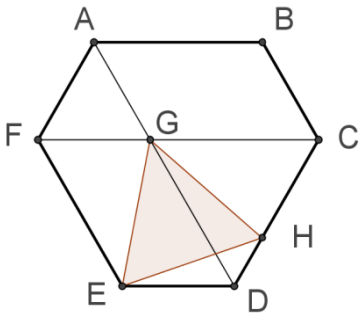
### Exercice 2 6, 5, 4, 3, 2

Le cercle  $\Omega$  de centre O et de rayon 6 étant donné ainsi que son diamètre [BC], on place les deux cercles  $\Sigma$  passant par O et tangent en B à  $\Omega$  et  $\Sigma'$  passant par O et tangent en C à  $\Omega$ . Sur le diamètre [AH] perpendiculaire à (BC), on place les points F et G, centres de cercles tangents à  $\Omega$ ,  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . On note D et E les centres des cercles  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . Quelles sont les dimensions du losange EFDG ?



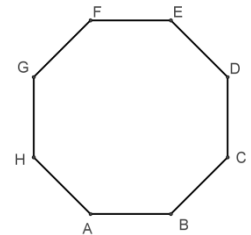
### Exercice 3 Hexagone

Dans l'hexagone ABCDEF, les côtés opposés sont parallèles, et de longueurs 2 ou 3 (alternativement en suivant l'ordre des points à partir de AB = 3). Les diagonales [AD] et [CF] se coupent en G. H est le point du segment [CD] tel que DH = 1. Montrer que le triangle EGH est équilatéral.



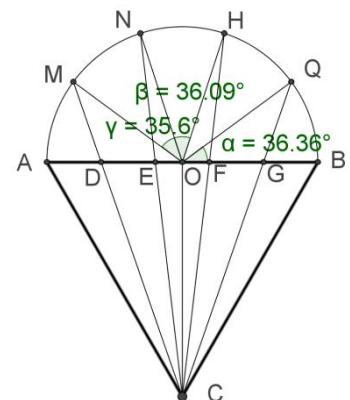
### Exercice 4 Octogone

L'octogone ABCDEFGH est régulier : ses angles sont tous de même mesure, ses côtés sont tous de même longueur, qu'on prendra comme unité.  
Quelles sont les longueurs de ses diagonales [AC], [AD] et [AE] ?



### Exercice 5 Comme des architectes médiévaux

Dans son ouvrage « Histoire de géomètres et de géométrie », Jean-Louis Brahem rapporte un exemple de réalisation approchée du partage en 5 d'un demi-cercle (le fond d'une abside) : le diamètre [AB] est le côté d'un triangle équilatéral ABC. On partage [AB] en 5 en y plaçant les points D, E, F, G. Les demi-droites [CD), [CE), [CF) et [CG) coupent le demi-cercle de diamètre [AB] en M, N, P et Q respectivement. On a alors à peu près  $AM = MN = NP = PQ = QB$ . La figure ci-contre montre trois mesures d'angles voisines...  
Prouver que cette construction est exacte lorsqu'il s'agit d'un partage en 3.



### Exercice 6 Produit de rayons

Sur le côté [BC] du triangle équilatéral ABC de côté 3, on place le point D tel que  $BD = 1$ . On appelle  $s$  le rayon du cercle inscrit dans le triangle ADC et  $r$  le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABD. Quel est le produit  $rs$  ?

*On rappelle que les bissectrices intérieures des angles d'un triangle sont concourantes en un point équidistant des côtés du triangle (dont cette propriété de concours prouve l'existence). Le cercle centré en ce point et tangent à un côté du triangle l'est aux trois. On l'appelle cercle inscrit dans le triangle.*

## Thème nombres

### Exercice 1 Mise en jambes

Deux entiers positifs  $a$  et  $b$  vérifient :  $90 < a + b < 99$  et  $0,9 < \frac{a}{b} < 0,91$ . Trouver  $a$  et  $b$ .

### Exercice 2 Et mon tout est 98

Combien existe-t-il de suites croissantes d'au moins deux entiers naturels consécutifs dont la somme est 98 ?

### Exercice 3 Permutations

$a, b$  et  $c$  sont des nombres entiers positifs,  $\frac{a+b}{c}$ ,  $\frac{b+c}{a}$  et  $\frac{c+a}{b}$  sont des nombres entiers positifs. Quelles sont les valeurs possibles de  $S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$  ?

### Exercice 4 L'origine de l'inégalité

Les nombres  $a, b, c, d$  et  $e$  sont tels que

$$a + b < c + d < e + a < b + c < d + e.$$

Quels sont le plus petit et le plus grand de ces nombres ?

### Exercice 5 Tout passe, tout s'efface (Olympiades 2016)

On dispose d'une règle graduée en cm dont la longueur, supérieure à 4 cm, est un nombre entier  $n$  de centimètres.

La figure ci-contre représente une règle de longueur 6 dont la graduation 2 a été effacée. Elle permet cependant de mesurer toutes les longueurs entières inférieures ou égales à 6. La longueur 2 est, par exemple, obtenue avec les graduations 1 et 3 ou avec les graduations 3 et 5.

On dit alors que la liste  $(1, 3, 4, 5)$  est *opérationnelle*.

Plus généralement, on dira qu'une liste d'entiers compris entre 1 et  $n - 1$  est *opérationnelle* pour une règle de longueur  $n$  si les écarts entre les extrémités de la règle ou les graduations marquées permettent de retrouver tous les entiers compris entre 1 et  $n$ .

1. On suppose que la longueur de la règle est égale à 6 cm.

**a.** Le triplet  $(2, 3, 4)$  est-il opérationnel ?

**b.** Le couple  $(1, 4)$  est-il opérationnel ?

**2.** Démontrer que pour une règle de 9 cm de longueur, il existe un triplet qui est opérationnel.

**3. a.** Combien d'écarts au maximum peut-on constituer à partir de  $p$  graduations et des extrémités d'une règle ?

**b.** Démontrer, pour une règle de 11 cm, qu'il n'existe pas de triplet qui soit opérationnel.

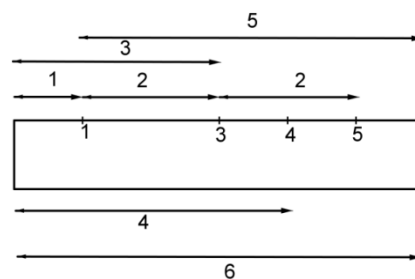
**4.** On suppose que la règle a une longueur de 10 cm. On considère une liste de graduations opérationnelle dont  $a \geq 1$  est le plus petit élément et  $b \leq 9$  le plus grand.

**a.** Montrer que  $a = 1$  ou  $b = 9$ .

**b.** On suppose que  $a = 1$ . Si la liste opérationnelle ne comporte que 3 entiers, montrer que  $b = 8$ .

**c.** En déduire qu'il n'existe pas de liste opérationnelle à trois termes.

**d.** Trouver une liste opérationnelle à quatre termes.



### Exercice 6 Dés collés (Olympiades 2016)

On rappelle que sur un dé à jouer la somme des nombres inscrits sur deux faces opposées est égale à 7. Cette condition est réalisée dans ce problème.

**1. a.** On aligne deux dés en collant deux faces représentant le même nombre. On convient que toutes les faces non collées sont accessibles à la vue, quitte à tourner l'ensemble. Quelles sont les valeurs possibles de la somme  $S_2$  des nombres apparaissant sur toutes les faces visibles (non collées entre elles) ?

**b.** On aligne trois dés de la même façon : en collant l'une contre l'autre des faces portant le même nombre. Montrer que la somme  $S_3$  des nombres apparaissant sur toutes les faces visibles (non collées entre elles) ne dépend pas des nombres cachés.

**2.** Maintenant on aligne  $k$  dés, de la gauche vers la droite, toujours en collant deux faces représentant le même nombre, l'une contre l'autre. Soit  $n$  le premier nombre caché en commençant par la gauche.

**a.** Exprimer la somme des faces visibles des  $k$  dés, notée  $S_k$ , en fonction de  $n$  et de  $k$ . (On pourra distinguer deux cas en fonction de la parité de  $k$ ).

**b.** Peut-on avoir  $S_k = 2016$  pour un  $k$  bien choisi ?

**c.** Quelle est la prochaine année  $A$  pour laquelle on pourra avoir  $S_k = A$  pour un  $k$  bien choisi ?