Thème : Algèbre
Équations, inégalités, polynômes

Exercice 1
Soient a et b deux réels non nuls. Déterminer le minimum de :

$$S(a,b)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{a^6}{b^6}+\frac{b^6}{a^6}$$

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x)=x^3+3x^2-1$. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f\left(f(x)\right)=0$?

Exercice 3
Quelle est la solution réelle de l'équation : $x^5+5x^3+5x-1=0$?

Exercice 4
Prouver que, pour tous x, y et z éléments de $[1,2]$: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$.

Étudier les cas d'égalité.

Exercice 5
Soit P un polynôme de degré 2008 tel que $P(k)=\frac{1}{k}$, pour tout $k\in\{1,2,3,...,2009\}$. Calculer $P(0)$.

Exercice 6
Déterminer le plus grand entier positif n pour lequel il existe un polynôme **à coefficients entiers** tel que $P(0)=0$ et $P(x_1)=P(x_2)=P(x_3)=...=P(x_n)=2\,009$, les x_i étant des **entiers** deux à deux distincts.

Exercice 7
Une chèvre est reliée par une corde de longueur ℓ à un pieu fixé en un point A de la circonférence d'un enclos circulaire de centre O, d'herbe tendre et de rayon R.
Déterminer ℓ (en fonction de R) pour que la chèvre puisse brouter au maximum la moitié de l'herbe de l'enclos.

Exercice 8
Lors d'une compétition sportive, qui a duré N jours, on a distribué le premier jour une médaille plus le septième des médailles restantes. Le deuxième jour, on a distribué deux médailles plus le septième des médailles restantes. Cela a continué ainsi jusqu'à l'avant-dernier jour. Le dernier jour, on a distribué les N médailles qui restaient.
Combien de jours la compétition a-t-elle duré ? Combien de médailles furent distribuées ?