Correction Fiche : Algèbre, Equations, Inégalités, Polynômes

Exercice 1 : a et b sont deux réels non nuls. Soit $S(a,b)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{a^6}{b^6}+\frac{b^6}{a^6}$.

On cherche le minimum de S.

<u>Méthode n° 1:</u>

$$S(a,b)=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+2+\left((\frac{a}{b})^2-(\frac{b}{a})^2\right)^2+2+\left((\frac{a}{b})^3-(\frac{b}{a})^3\right)^2+2=6+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+\left((\frac{a}{b})^2-(\frac{b}{a})^2\right)^2+\left((\frac{a}{b})^3-(\frac{b}{a})^3\right)^2.$$

Donc, pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$: $S(a,b)\geq 6$.

Et $S(a,b)=6\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$; $(\frac{a}{b})^2=(\frac{b}{a})^2$ et $(\frac{a}{b})^3=(\frac{b}{a})^3\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow a=b$ ou $a=-b$.

Pour tout $a\in\mathbb{R}^*$: $S(a,a)=S(a,-a)=6$. Donc **6 est le minimum de *S*.**

<u>Méthode n° 2:</u> $S(a,b)=f\left(\frac{a^2}{b^2}\right)+f\left(\frac{a^4}{b^4}\right)+f\left(\frac{a^6}{b^6}\right)$ avec $f:x\to x+\frac{1}{x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	2	$\nearrow$	

On en déduit que f admet un minimum sur $]0;+\infty[$ atteint en 1, qui vaut 2.

Comme $\frac{a^2}{b^2}$; $\frac{a^4}{b^4}$ et $\frac{a^6}{b^6}$ sont dans $]0;+\infty[$, on en déduit donc que : $S(a,b)\geq 6$ et que

$S(a,b)=6\Leftrightarrow f\left(\frac{a^2}{b^2}\right)=2$; $f\left(\frac{a^4}{b^4}\right)=2$; $f\left(\frac{a^6}{b^6}\right)=2\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}=1\Leftrightarrow a^2=b^2$.

Exercice 2 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2-1$.

Etude de f : $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$ d'où :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Donc $f(x)=0$ a trois solutions réelles : $x_1;x_2;x_3$ avec $x_1<-2$; $-2<x_2<0$ et $x_3>0$.

$f(-1)=-1+3-1=1>0$ donc $-1<x_2<0$. Et : $f(1)=3>0$ donc $0<x_3<1$.

Nombre de solutions de $f(f(x))=0$.

$f(f(x))=0\Leftrightarrow f(x)=x_1$ ou $f(x)=x_2$ ou $f(x)=x_3$.

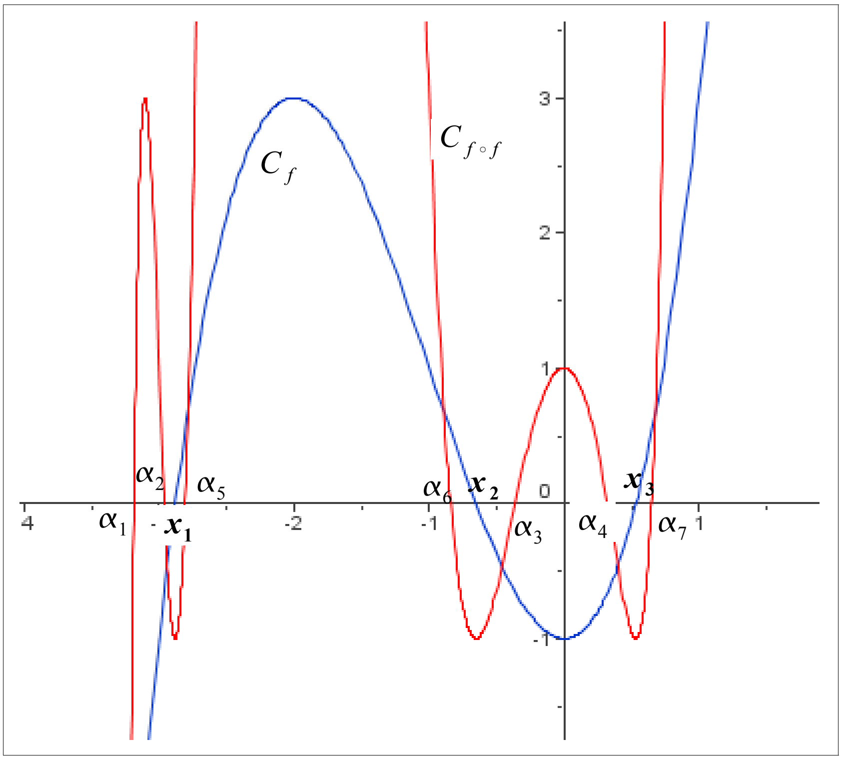
- Comme $x_1<-2$: $f(x)=x_1$ a une unique solution : $\alpha_1<-2$.
- Comme $-1<x_2<0$: $f(x)=x_2$ a trois solutions : $\alpha_2<-2$; $-2<\alpha_3<0$ et $0<\alpha_4$.
- Comme $0<x_3<1$ alors $f(x)=x_3$ a trois solutions : $\alpha_5<-2$; $-2<\alpha_6<0$ et $0<\alpha_7$.

f est strict. croissante sur $]-\infty;-2]$ donc $\boxed{x_1<x_2<x_3\Rightarrow\alpha_1<\alpha_2<\alpha_5<-2.}$

f est strict. décroissante sur $]-2;0]$ donc $\boxed{x_2<x_3\Rightarrow -2<\alpha_6<\alpha_3<0.}$

f est strict. croissante sur $]0;+\infty[$ donc $\boxed{x_2<x_3\Rightarrow 0<\alpha_4<\alpha_7.}$

Finalement : $f(f(x))=0$ a **sept solutions réelles** : $\boxed{\alpha_1<\alpha_2<\alpha_5<-2<\alpha_6<\alpha_3<0<\alpha_4<\alpha_7.}$



Avec :
$x_1\simeq-2{,}88\,;\,x_2\simeq-0{,}65\,;\,x_3\simeq0{,}53$
et
$\alpha_1\simeq-3{,}19\,;\,\alpha_2\simeq-2{,}96\,;\,\alpha_5\simeq-2{,}81$
$\alpha_6\simeq-0{,}84\,;\,\alpha_3\simeq-0{,}36\,;$
$\alpha_4\simeq0{,}32\,;\,\alpha_7\simeq0{,}65.$

Exercice 3 : On considère l'équation **(E)** : $x^5+5x^3+5x-1=0$.

Une étude de fonction montre que **(E)** admet une unique solution réelle.

On pose : $x=t-\frac{1}{t}$. Alors : $x^3=t^3-3t+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^3}$ et $x^5=t^5-5t^3+10t-\frac{10}{t}+\frac{5}{t^3}-\frac{1}{t^5}$.

L'équation $x^5+5x^3+5x-1=0$ est alors équivalente à : $t^5-\frac{1}{t^5}-1=0$.

On pose : $u=t^5$; on résout $u^2-u-1=0$; on trouve $u=\varphi$ ou $u=-\frac{1}{\varphi}$

(avec φ le nombre d'or ; $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). D'où : $t=\sqrt[5]{\varphi}$ ou $t=-\frac{1}{\sqrt[5]{\varphi}}$.

Les deux valeurs de *t* donnent la même valeur de *x* : $x=\sqrt[5]{\varphi}-\frac{1}{\sqrt[5]{\varphi}}$ soit : $\boxed{x=\sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[5]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

Exercice 4 : Pour tout $x,y,z\in[1,2]$, on note
$f(x,y,z)=(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})-6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)$.
Comme *f* est invariante par permutations circulaires des variables, on peut supposer que $x=max(x,y,z)$.

- **Etape 1 :** Montrons que $f(x,y,z)\geq f(x,t,t)$ avec $t=\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow x+y=2t$.

$$f(x,y,z)-f(x,t,t)=(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})-6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)-(x+2t)(\frac{1}{x}+\frac{2}{t})+6\left(\frac{x}{2t}+\frac{2t}{x+t}\right)$$
$$=(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})-(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{2}{t})-6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)+6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{2t}{x+t}\right)$$
$$=(x+y+z)(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{2}{t})-6\left(\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}-\frac{2t}{x+t}\right)=a-6b.$$

$$\boxed{a=(x+y+z)(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{2}{t})=\frac{x+y+z}{yzt}((y+z)t-2yz)=\frac{x+y+z}{yzt}\left(\frac{(y+z)^2}{2}-2yz\right)=\frac{x+y+z}{2yzt}(y-z)^2.}$$
$$b=\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}-\frac{2t}{x+t}=\frac{y(x+y)(x+t)+z(x+z)(x+t)-2t(x+z)(x+y)}{(x+z)(x+y)(x+t)}=\frac{c}{(x+z)(x+y)(x+t)}.$$

$c=(y+z)x^2+(y^2+z^2)x+t[yx+y^2+zx+z^2-2(x^2+zx+yx+zy)]$
$=(y+z)x^2+(y^2+z^2)x+t[y^2+z^2-2yz-x(y+z)-2x^2]=(y+z)x^2+(y^2+z^2)x+t[(y-z)^2-x(y+z)-2x^2]$
$=t(y-z)^2+x(y^2+z^2-t(y+z))+x^2(y+z-2t)=t(y-z)^2+x\left(y^2+z^2-\frac{(y+z)^2}{2}\right)=\frac{y+z}{2}\times(y-z)^2+x\frac{(y-z)^2}{2}$

$\boxed{c=\frac{(y-z)^2}{2}(x+y+z).}$

D'où :

$a-6b=\frac{(y-z)^2(x+y+z)}{2}\left(\frac{1}{yzt}-\frac{6}{(x+z)(x+y)(x+t)}\right)=\frac{(y-z)^2(x+y+z)}{2yzt(x+z)(x+y)(x+t)}[(x+y)(x+z)(x+t)-6yzt].$

Comme *x, y, z* sont tous positifs alors le premier facteur est positif ou nul et pour le second, comme : $x\geq y$; $x\geq z$ et donc $x\geq t$ alors : $x+z\geq 2z;x+t\geq 2t$ et $x+y\geq 2y\Rightarrow(x+y)(x+z)(x+t)\geq 8yzt>6yzt$.

Donc : $\boxed{f(x,y,z)\geq f(x,t,t) \text{ avec } f(x,y,z)=f(x,t,t)\Leftrightarrow y=z.}$

- **Etape 2 :** Montrons que $\forall x,t\in[1,2]$ avec $x\geq t, f(x,t,t)\geq 0$, .

$f(x,t,t)=(x+2t)(\frac{1}{x}+\frac{2}{t})-6\left(\frac{x}{2t}+\frac{2t}{x+t}\right)=(x+2t)\frac{t+2x}{xt}-\left(\frac{3x}{t}+\frac{12t}{x+t}\right)=\frac{e}{xt(x+t)}.$

$e=(x+2t)(2x+t)(x+t)-3x^2(x+t)-12xt^2=(x+t)(-x^2+5tx+2t^2)-12t^2x$
$e=-x^3+5tx^2+2t^2x-tx^2+5t^2x+2t^3-12t^2x=-x^3+4tx^2-5t^2x+2t^3.$

On remarque que *e* s'annule pour $x=t$.

$e=(x-t)(-x^2)+3tx^2-5t^2x+2t^3=(x-t)(-x^2+3tx)-2t^2x+2t^3=(x-t)(-x^2+3tx-2t^2)$

d'où $\boxed{e=(x-t)(x-t)(2t-x)=(x-t)^2(2t-x).}$

Pour tout $x,t\in[1,2]$; $xt(x+t)>0$ et $e\geq 0$ avec $e=0\Leftrightarrow x=t$ ou $x=2t$.

- **Conclusion :**

Finalement : $\forall x,y,z\in[1,2], f(x,y,z)\geq 0.$
Dans le cas où $x=max(x,y,z)$, on a égalité pour : $y=z$ et $(x=t$ ou $x=2t)$.
Comme $t\geq 1$ et $x\leq 2$ alors $x=2t\Leftrightarrow x=2$ et $t=1$.
Et : $t=\frac{y+z}{2}=1\Leftrightarrow y+z=2\Leftrightarrow y=z=1$ car $y\geq 1$ et $z\geq 1$.

Tenant compte du fait, qu'on a supposé que *x* est le plus grand des trois, on a finalement égalité dans le cas où (x,y,z) vaut $\boxed{(a,a,a) \text{ avec } a\in[1,2] \text{ ou } (1,1,2) \text{ ou } (1,2,1) \text{ ou } (2,1,1).}$

Exercice 5 : *P* est un polynôme de degré 2008 avec : $\forall k\in\{1,2,...,2009\}, P(k)=\frac{1}{k}.$

Soit $Q(X)=XP(X)-1$. *Q* est un polynôme de degré 2009.
$\forall k\in\{1,2,...,2009\},Q(k)=0$ donc 1, 2, ..., 2009 sont les 2009 racines de *Q*.

Ainsi $Q(X)=a(X-1)(X-2)...(X-2009)=a\prod_{i=1}^{i=2009}(X-i)$, avec $a\in\mathbb{R}$.

$Q(0)=a\prod_{i=1}^{i=2009}(-i)=-a2009!$. Or $Q(0)=-1$ d'où : $a=\frac{1}{2009!}$.

<u>Méthode n° 1:</u>

$Q'(X)=P(X)+XP'(X)\Rightarrow P(0)=Q'(0).$

$Q'(X)=a\sum_{k=1}^{2009}\prod_{i=1;\,i\neq k}^{2009}(X-i)\Rightarrow Q'(0)=a\sum_{k=1}^{2009}\prod_{i=1;\,i\neq k}^{2009}(-i)=a\sum_{k=1}^{2009}\frac{2009!}{k}=\sum_{k=1}^{2009}\frac{1}{k}.$

Finalement : $\boxed{P(0)=\sum_{k=1}^{2009}\frac{1}{k}.}$

<u>Méthode n° 2:</u>

Q est un polynôme de degré 2009, donc il existe 2010 réels $a_0,a_1,a_2,...,a_{2009}$ tels que :

$Q(X)=a_{2009}X^{2009}+a_{2008}X^{2008}+...+a_2X^2+a_1X+a_0.$ $a_0=Q(0)=-1$, donc :

$Q(X)=a_{2009}X^{2009}+a_{2008}X^{2008}+...+a_2X^2+a_1X-1.$

$P(X)=\dfrac{Q(X)+1}{X}$ donc $P(X)=a_{2009}X^{2008}+a_{2008}X^{2007}+...+a_2X+a_1$ d'où $P(0)=a_1$.

$P(0)$ est le coefficient de *X*, c'est-à-dire du terme de degré 1, dans $Q(X)$.

D'après $Q(X)=\dfrac{1}{2009!}(X-1)(X-2)...(X-2009)$, on a :

$$a_1=\frac{(-2)\times(-3)\times...\times(-2009)}{2009!}+\frac{(-1)\times(-3)\times...\times(-2009)}{2009!}+...+\frac{(-1)\times(-2)\times...\times(-2008)}{2009!}$$

soit : $a_1=P(0)=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{2009}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2009}\frac{1}{k}$.

Exercice 6 : On cherche le plus grand entier positif *n* tel qu'il existe *P* un polynôme à coefficients entiers tel que : $P(0)=0$ et $P(x_1)=P(x_2)=...=P(x_n)=2009$, avec x_i des entiers deux à deux distincts.

$x_1,x_2,...,x_n$ sont donc des racines du polynôme $P(X)-2009$.

D'où : $P(x)-2009=Q(x)(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ avec $Q\in\mathbb{Z}[X]$.

$P(0)=0\Leftrightarrow Q(0)(-x_1)(-x_2)...(-x_n)=2009=7^2\times41$.

Ainsi $x_1,x_2,...,x_n$ sont des diviseurs de $7^2\times41$.

$7^2\times41$ peut s'écrire comme le produit d'au plus 3 entiers positifs et distincts 2 à 2 : $1;7^2;41$ ou $1;7;7\times41$. Donc $7^2\times41$ peut s'écrire comme, au plus, le produit de 5 entiers distincts 2 à 2, par ex. $-1;1;-7;7;41$. Ainsi : $n\le5$.

Le polynôme : $P(X)=2009+(X-1)(X+1)(X-7)(X+7)(X-41)$ convient.

Le plus grand entier positif *n* qui convient est : **5.**

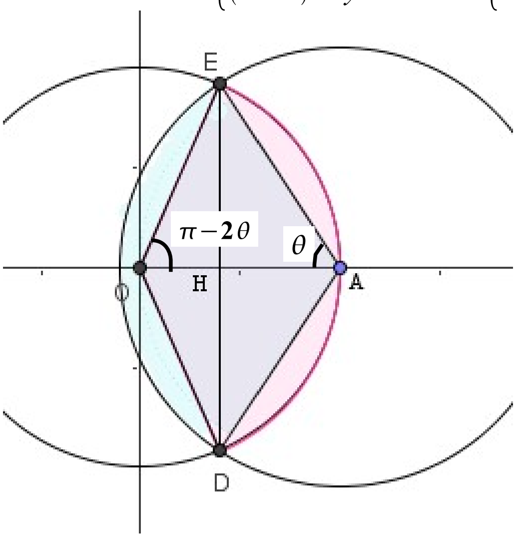
Exercice 7 : Soit C_1 le cercle de centre O et de rayon R . Soit A un point de C_1 et C_2 le cercle de centre A et de rayon *r*.

On se place dans un repère orthonormal du plan dans lequel $A(R;0)$.

C_1 : $x^2+y^2=R^2$ et C_2 : $(x-R)^2+y^2=r^2$

<u>Points d'intersection des deux cercles :</u>

$$M(x;y)\in C_1\cap C_2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\(x-R)^2+y^2=r^2\end{cases}C_2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\x^2-(x-R)^2=R^2-r^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\2xR=2R^2-r^2\end{cases}\Rightarrow x=\frac{2R^2-r^2}{2R}=R-\frac{r^2}{2R}.$$



Soit *A* l'aire que peut brouter la chèvre : $A=a_1+a_2-aire(AEOD)$.

Avec a_1 aire du secteur circulaire EAD (en bleu); a_2 aire du secteur circulaire EOD (en rose).

Dans le triangle rectangle OHE :

$$HE^2=R^2-x^2=R^2-\frac{(2R^2-r^2)^2}{4R^2}=\frac{4R^4-4R^4+4R^2r^2-r^4}{4R^2}=r^2\left[1-\left(\frac{r}{2R}\right)^2\right]\Leftrightarrow HE=r\sqrt{1-\left(\frac{r}{2R}\right)^2}.$$

Soit $\theta=\widehat{EAO}$ (en radians). On a $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. Le triangle OEA est isocèle en O donc $\widehat{EOA}=\pi-2\theta$.

$a_1 = r^2\theta$; $a_2 = R^2(\pi - 2\theta)$; $aire(AEOD) = OA \times EH = Rr \times \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2R}\right)^2}$.

De plus : $\cos\theta = \frac{AH}{AE} = \frac{(R-x)}{r} = \frac{r}{2R}$ et $\sin\theta = \frac{EH}{AE} = \frac{EH}{r} \Rightarrow EH = r\sin\theta = 2R\cos\theta\sin\theta$.

Ainsi : $\boxed{A = 4R^2\theta\cos^2\theta + R^2(\pi - 2\theta) - 2R^2\cos\theta\sin\theta = g(\theta).}$ Avec $D_g = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

On cherche θ pour lequel $g(\theta) = \frac{\pi R^2}{2}$. Pour tout $\theta \in D_g$:

$g'(\theta) = 4R^2\cos^2\theta - 8R^2\theta\cos\theta\sin\theta - 2R^2 - 2R^2\cos^2\theta + 2R^2\sin^2\theta = 2R^2\cos^2\theta + 2R^2\sin^2\theta - 4R^2\sin 2\theta - 2R^2$

d'où : $g'(\theta) = -4R^2\sin 2\theta < 0$ car $0 < 2\theta < \pi$.

Donc g est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ avec $g(0) = R^2\pi$ et $g(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Ainsi il existe une unique valeur de θ dans $]0;\pi[$ telle que : $g(\theta) = \frac{\pi R^2}{2}$.

On trouve, à l'aide d'une calculatrice : $\boxed{\theta \simeq 0{,}9528.}$

Alors : $\boxed{r = 2R\cos\theta \simeq 1{,}1588\,R.}$

Exercice 8 : Soit N le nombre de jours, on note u_p le nombre de médailles distribuées le jour *p*.

Par hypothèse : $u_1 = 1 + \frac{1}{7}(u_1 + u_2 + ... + u_N - 1)$; $u_2 = 2 + \frac{1}{7}(u_2 + u_3 + ... + u_N - 2)$; ....;

$u_{p+1} = p + 1 + \frac{1}{7}(u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_N - (p+1))$; ...... ; $u_N = N$.

Pour tout entier naturel *p* tel que $1 \le p \le N-1$: $u_{p+1} = p + 1 + \frac{1}{7}(u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_N - (p+1))$ et

$u_p = p + \frac{1}{7}(u_p + u_{p+1} + ... + u_N - p)$. Alors : $u_{p+1} - u_p = 1 + \frac{1}{7}(-u_p - 1) \Leftrightarrow$ $\boxed{u_{p+1} = \frac{6}{7}u_p + \frac{6}{7}.}$

Posons $v_p = u_p - 6$ alors : $v_{p+1} = u_{p+1} - 6 = \frac{6}{7}u_p + \frac{6}{7} - 6 = \frac{6}{7}(u_p - 6) = \frac{6}{7}v_p$.

Donc (v_p) est géométrique de raison $q = \frac{6}{7}$ avec $u_N = N \Rightarrow v_N = N - 6$.

Alors, pour tout entier naturel *p* tel que $1 \le p \le N$: $v_p = (N-6)\left(\frac{6}{7}\right)^{p-N} \Leftrightarrow$ $\boxed{u_p = 6 + (N-6)\left(\frac{6}{7}\right)^{p-N}}$

D'où : $u_{N-1} = 6 + (N-6)\frac{7}{6}$. $u_{N-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow (N-6)\frac{7}{6} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6 | (N-6) \Rightarrow 6 | N \Rightarrow N = 6k$, avec $k \ge 1$, car $N > 0$.

$u_1 = 6 + (N-6)\frac{7^{N-1}}{6^{N-1}}$. $u_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow (N-6)\frac{7^{N-1}}{6^{N-1}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6^{N-1} | (N-6)$.

Or, pour tout $N \ge 1$: $6^{N-1} \ge N$.
(par récurrence : la propriété est vraie pour $N = 1$. Si elle est vraie pour $N \ge 1$ alors comme
$6^{N+1} = 6 \times 6^N \ge 6N \ge N+1$; elle est aussi vraie pour $N+1$.)

Donc comme $6^{N-1} | (N-6)$ et $6^{N-1} \ge N > N-6$ avec $N - 6 \in \mathbb{N}$ alors $N - 6 = 0 \Leftrightarrow N = 6$.

Donc, pour tout entier naturel *p* tel que $1 \le p \le N$: $u_p = 6$ et le nombre total de médailles distribuées est $6N$, soit 36.

Le nombre de jours est **N = 6** et le **nombre total de médailles distribuées est de 36.**