COMBINATOIRE.

Pierre Bornsztein, 27 Février 2009.

I- Compter c'est bien, mais double-compter, c'est mieux.

Exercice 1.

Prouver que, pour tous entiers n, p avec $0 \leq p \leq n$, on a

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

et

$$p(p-1)\binom{n}{p} = n(n-1)\binom{n-2}{p-2}.$$

Exercice 2.

Dans un lycée, il y a b professeurs et c élèves. Chaque professeur enseigne à exactement k élèves et deux élèves quelconques ont toujours exactement h professeurs en commun. Prouver que

$$\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}.$$

Exercice 3.

Prouver que, pour tous entiers i, j tels que $1 \leq j \leq i$, on a

$$\sum_{p=0}^{j}(-1)^p\binom{i}{p}\binom{i+j-p-1}{j-p} = 0.$$

Exercice 4.

Soit $n > 1$ un entier. Dans le plan, on considère n cercles de rayon 1, deux quelconques jamais tangents, et tels que chacun de ces cercles en intersecte au moins un autre. Prouver qu'ils définissent au moins n points d'intersections.

II- Et maintenant, un peu de probabilités.

Exercice 5.

Soient $m, n \geq 2$ des entiers. Prouver que, pour tous réels positifs $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ tels que $x_i + y_i = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on a

$$(1 - x_1 x_2 \cdots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \cdots (1 - y_n^m) \geq 1.$$

Exercice 6.

Soit S un ensemble fini de points du plan, trois jamais alignés. Pour tout polygone convexe P dont les sommets appartiennent à S, on note $a(P)$ le nombre de sommets de P, et $b(P)$ le nombre de points de S qui sont extérieurs à P. Un segment, un point et l'ensemble vide sont considérés comme des polygones convexes à respectivement $2, 1, 0$ sommets.
Prouver que, pour tout réel x, on a

$$\sum_P x^{a(P)}(1 - x)^{b(P)} = 1.$$

Exercice 7.

Soit $k \in \{1, 2, \cdots, 100\}$.
Les 100 passagers d'un avion de 100 places entrent dans l'appareil, l'un après l'autre, dans l'ordre du numéro de leur carte d'embarquement. Ils ont chacun une place réservée, mais la première personne à monter dans l'avion est une vieille folle qui s'assoit sur une place choisie au hasard (et de façon équiprobable). Puis, chacun des autres, à son tour, va s'assoir à sa place réservée si elle est encore libre ou, dans le cas contraire, s'installe au hasard (et de façon équiprobable) sur n'importe laquelle des places restantes.
Quelle est la probabilité que le 100^{ieme} passager se soit finalement assis à sa place réservée?