Thème : Fonctions, équations fonctionnelles

Exercice 1

Soit un entier naturel n et f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

si $x > 0$, $f_n(x) = x(n + \ln x)$

et $f_n(0) = 0$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. *a.* Montrer que f_n est continue en 0 ; est-elle dérivable en 0 ?

b. Etudier les variations de la fonction f_n.

c. Montrer que C_{n+1} se déduit de C_n par une homothétie de centre O et de rapport à préciser.

2. Soit a un réel strictement positif. On considère l'application φ_a du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = ax\ln a + ay \end{cases}$$

a. Montrer que, pour tous réels a et a' strictement positifs, $\varphi_{a'} \circ \varphi_a = \varphi_{aa'}$

b. Montrer que toute courbe C_n est globalement invariante par φ_a.

Exercice 2

On donne trois réels *a*, *b* et *c* et la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

On suppose que $|f(0)| \leqslant 1$, $|f(1)| \leqslant 1$ et $|f(-1)| \leqslant 1$.

Montrer que, pour tout réel *x* vérifiant $|x| \leqslant 1$, on a $|f(x)| \leqslant \frac{5}{4}$.

Exercice 3

Trouver tous les réels *b* pour lesquels la différence entre le maximum et le minimum sur l'intervalle $[0,1]$ de la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 - 2bx - 1$ est égale à 1.

Exercice 4

Soit f une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que, pour tout *x* élément de $\left[0,\frac{7}{10}\right]$, $f\left(x+\frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au mois 7 (sept) solutions sur l'intervalle $[0,1]$.

2. Donner un exemple de fonction *f* vérifiant les hypothèses (une représentation graphique claire peut suffire ici).

Exercice 5

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions *f* définies et dérivables sur l'intervalle $I =]-1,1[$, autres que la fonction nulle et telles que, pour tout *x* et tout et tout *y* dans *I* : $f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

Soit φ une fonction vérifiant ces conditions.

1. Montrer que $\varphi(0) = 1$.

Montrer que φ ne s'annule pas sur *I* et que, pour tout *x* élément de *I*, $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$.

2. Soit *x* un élément de *I.* Soit *h* un élément de *I* tel que $x + h \in I$.

Montrer qu'il existe y appartenant à I tel que $x+h=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

En déduire que $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\varphi'(0)}{1-x^2}$

Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x dans I : $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{a}{1+x}+\dfrac{b}{1-x}$. En déduire l'expression de $\varphi(x)$.

Traiter la réciproque.

Exercice 6

Trouver une fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ telle que pour tout réel positif x on ait : $f\left(f(x)\right)=\dfrac{3x+1}{x+3}$.

Exercice 7

Déterminer les fonctions de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ telles que :

1. Pour tous réels x et y strictement positifs $f\left(xf(y)\right)=yf(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$
3.

Exercice 8

Trouver toutes les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que, pour tous réels x et y,

$$f(x).f\left(yf(x)-1\right)=x^2f(y)-f(x).$$