THEME : Géométrie plane

Eléments de correction.

Exercice 4 :

$BL^2+CM^2+AN^2 = CL^2+AM^2+BN^2 = \frac{BL^2+CL^2}{2}+\frac{CM^2+AM^2}{2}+\frac{BN^2+AN^2}{2}$

Posons: BC = a , (a>0), et BL = x ($0 \le x \le a$)

$BL^2 + CL^2 = x^2+(a-x)^2$

La fonction f définie sur [0 ; a] par f(x) = $x^2+(a-x)^2$ admet un minimum en x = $\frac{a}{2}$

Donc, $BL^2 + CL^2$ est minimal lorsque L milieu de [BC]

Par un raisonnement analogue, on montre que $CM^2 + AM^2$ minimal lorsque M milieu de [AC] et BN^2+AN^2 minimal lorsque N milieu de [AB].

Le point P intérieur au triangle dont les projetés orthogonaux respectifs sur les trois côtés du triangle sont les milieux de ces côtés est le point d'intersection des médiatrices du triangle (= centre du cercle circonscrit).

EXERCICE 5 :

On reprend les notations de l'exercice et on appelle I le centre du cercle inscrit.

Aire(ABC) = aire (IAB) + aire (IAC) + aire (IBC)

Aire (ABC) = $\frac{1}{2}$ **(** $c\times r+b\times r+a\times r$ **) =** $\mathbf{p\times r}$

Aire(ABC) = $\frac{1}{2}ab\sin(C)=\frac{1}{2}ac\sin(B)=\frac{1}{2}bc\sin(A)$

$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}=2R$ donc a = 2R sin(A) ; b = 2R sin(B) et c= 2R sin(C)

Aire(ABC) = 2 R^2 sin(A).sin(B).sin(C).

$\sin(C)=\frac{c}{2R}$ donc **Aire (ABC)** = $\frac{abc}{4R}$

Relations d'Al-Kashi : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos(A)$ et les deux autres relations obtenues par permutation circulaire des sommets et angles.

Enfin, pour démontrer la formule de Héron, on utilise la relation d'Al-Kashi puis l'aide suggérée.

EXERCICE 6 :

$a \ge 0; b \ge 0; c \ge 0$

a, b, c sont les longueurs des côtés du triangle ABC, donc vérifient l'inégalité triangulaire :

$a \le b+c$ et $b \le a+c$ et $c \le a+b$

(a+b-c)(a-b+c) = $a^2-(b-c)^2$ et $a^2-(b-c)^2 \le a^2$

(a+b-c)(-a+b+c) = $b^2-(a-c)^2$ et $b^2-(a-c)^2 \le b^2$

(a-b+c)(-a+b+c) = $c^2-(a-b)^2$ et $c^2-(a-b)^2 \le c^2$

En multipliant membre à membre ces inégalités entre réels positifs, on obtient :

$(a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2 \leq a^2b^2c^2$

Comme tous les réels a, b, c, a+b-c, a-b+c, -a+b+c sont positifs, cette inégalité équivaut à :

(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) $\leq$ **abc**

2***) Interprétation géométrique:***

On reprend les notations de l'exercice5

a+b+c = 2p   b+c-a = 2(p-a)   a-b+c = 2(p-b) et a+b-c = 2(p-c)

On en déduit avec les formules donnant l'aire du triangle ABC:

8 (p-a) (p-b) (p-c) $\leq$ abc

$\frac{8}{p} aire(ABC) \leq 4R$ puis, comme aire(ABC) = pr, on déduit finalement **la formule d'Euler** :

2r $\leq$ **R**

EXERCICE 7 :

aire (ABC) = 2R ^{2} sin(A)sin(B)sin(C)

aire (A'B'C') = 2R ^{2} sin(A')sin(B')sin(C')

aire(A'B'C') = 2R ^{2} $\cos(\frac{A}{2})\cos(\frac{B}{2})\cos(\frac{C}{2})$ car l'angle C' du triangle A'B'C' mesure 90° - $\frac{C}{2}$

On en déduit:

$\frac{aire(ABC)}{aire(A'B'C')} = \frac{\sin(A)\sin(B)\sin(C)}{\cos(\frac{A}{2})\cos(\frac{B}{2})\cos(\frac{C}{2})}$ = 8 $\sin(\frac{A}{2})\sin(\frac{B}{2})\sin(\frac{C}{2})$

On sait aussi que : $\sin(\frac{A}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(A)}{2}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

Avec des formules similaires pour $\sin(\frac{B}{2})$ et $\sin(\frac{C}{2})$, on obtient :

$\frac{aire(ABC)}{aire(A'B'C')} = 8\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

En utilisant les formules de l'exercice5 ;

$\frac{aire(ABC)}{aire(A'B'C')} = \frac{2r}{R}$

On déduit de la formule d'Euler :

aire(ABC) $\leq$ **aire(A'B'C')**